

УТВЕРЖДЕНА

заместитель директора
по образовательной деятельности
АНОО ВО «Университет «Сириус»

О. Д. Федоров

_____ 2026 г.



ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

для поступающих на обучение по образовательной программе
высшего образования – программе подготовки научных и научно-педагогических
кадров в аспирантуре по научной специальности


1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

СОГЛАСОВАНО:

Доцент направления «Финансовая математика и
финансовые технологии» научного центра
информационных технологий и искусственного
интеллекта

Руководитель приёмной комиссии


Г. В. Федоров


Б. Е. Кадлубович

Федеральная территория «Сириус»

2026

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Программа вступительных испытаний предназначена для лиц, поступающих на обучение по образовательной программе высшего образования — программе подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре по научной специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (далее – образовательная программа).

В программу вступительных испытаний включено описание форм и процедур вступительных испытаний, представлено содержание тем и критерии оценки.

Вступительные испытания проводятся в следующей форме:

- письменный экзамен;
- резюме;
- исследовательское предложение.

Письменное вступительное испытание оценивается по 30-балльной шкале. Резюме и мотивационное эссе оцениваются по 10-балльной шкале. Язык проведения письменного экзамена – русский, материалы резюме и исследовательского предложения принимаются на русском языке.

Проведение вступительных испытаний осуществляется с применением дистанционных технологий.

Продолжительность письменного экзамена: 120 минут.

.

1. Цель и задачи вступительных испытаний

Цель проведения вступительных испытаний - отбор наиболее подготовленных поступающих на обучение по образовательной программе 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, в том числе определение уровня их готовности к самостоятельной научной и проектной деятельности.

Основные задачи вступительных испытаний:

- выявление и оценка уровня сформированности общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций поступающего;
- определение уровня готовности к научной, педагогической и научно-исследовательской деятельности в рамках НИОКР;
- выяснение опыта и готовности работы в рамках проектной деятельности в компаниях и на производствах;
- выяснение познавательной и мотивационной сферы поступающего;
- выявление научных и профессиональных интересов;
- определение уровня научно-технической эрудиции и языковой подготовки поступающего.

Целью вступительных испытаний является проверка следующих знаний и умений:

- знание основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теорий функций комплексного переменного обыкновенных дифференциальных уравнений, математической логики, алгебры, теории чисел, дискретной математики, языка программирования Python;
- умение применять математические навыки, логическое мышление, аргументировать свои высказывания, поддержать беседу на научную тему, в том числе на английском языке;
- умение определять цели и задачи научного исследования, выделять актуальность научной проблематики, интерпретировать и анализировать результаты;

— владение навыками чтения научной литературы (на русском и английском языках) и базовыми инструментами поиска научной информации, в том числе в сети Интернет.

2. Содержание вступительных испытаний

2.1 Общие вопросы.

1. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
2. Язык логики высказываний. Булевы функции. Исчисление высказываний, его непротиворечивость и полнота.
3. Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.
4. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
5. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
6. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
7. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Лейбница).
8. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана. Умножение рядов.
9. Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
10. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.
11. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
12. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
13. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы.

14. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.
15. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
16. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.
17. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.
18. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.
19. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.
20. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.
21. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.
22. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное.
23. Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
24. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.
25. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.
26. Ряд Лорана. Полус и существенно особая точка. Вычеты.

2.2 Специальные вопросы

1. Аксиоматическая теория множеств. Парадоксы наивной теории множеств. Аксиома выбора. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело. Лемма Цорна.
2. Функции алгебры логики. Полнота в алгебре логики, критерий полноты Поста.
3. Общее понятие алгоритма. Вариант формализации понятия алгоритма. Универсальный алгоритм. Вычислимые функции, перечислимые и разрешимые множества. Теорема Гёделя о неполноте. Неразрешимость формальной арифметики.
4. Время и память как меры сложности вычислений. Классы P, NP, PSPACE. Полиномиальная сводимость. NP-полные проблемы.
5. Графы, деревья. Основные свойства деревьев.
6. Планарность графов, теорема Эйлера. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского.
7. Конечные автоматы, эксперименты с автоматами, теорема Мура.
8. Машины Тьюринга и рекурсивные функции, совпадение классов частично рекурсивных функций и функций, вычислимых на машинах Тьюринга.
9. Линейные операторы линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Теорема Гамильтона-Кэли. Жорданова нормальная форма линейного оператора.
10. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные и самосопряженные линейные операторы, их матрицы. Приведение квадратичной формы к главным. Перестановки. Симметрическая группа перестановок. Теорема Кэли о конечных группах.
11. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах для групп. Порядок элемента. Циклические группы. Коммутант группы, разрешимые группы. Классы сопряженности, центр группы. Действие групп на множестве, стабилизаторы, орбиты.
12. Кольца, поля. Кольцо многочленов. Деление с остатком многочленов над полем, алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены над полем, критерий

неприводимости многочленов степени 2 и 3, разложение многочлена над полем в произведение неприводимых многочленов.

13. Алгоритм Евклида поиска наибольшего общего делителя целых чисел. Решение линейных уравнений в целых числах.

14. Мультипликативные функции. Функция Мёбиуса, формула обращения Мёбиуса. Формулы для количества и для суммы делителей. Функция Эйлера и её свойства.

15. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Китайская теорема об остатках. Решение полиномиальных сравнений по простому модулю.

16. Символ Лежандра. Квадратичный закон взаимности. Символ Якоби и его вычисление.

17. Первообразные корни. Существование первообразных корней по простому модулю p , модулям p^k , $2p^k$, $k > 1$. Индексы и их свойства.

18. Представление чисел цепными дробями. Теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными. Цепные дроби квадратичных иррациональностей.

19. Конечные поля и их расширения. Цикличность мультипликативной группы конечного поля. Автоморфизм Фробениуса, группа Галуа для конечных полей.

20. Характеры абелевых групп. Двойственная группа, свойства ортогональности. Аддитивные и мультипликативные характеры конечного поля. Суммы Гаусса.

21 Основы языка программирования Python.

22. Переменные, типы переменных. Структуры данных – списки, словари, множества. Циклы, ветвления, рекурсия. Функции. Классы. Оценка сложности алгоритма.

3. Демонстрационный вариант письменного экзамена

1. (5 баллов) Пусть числа a_1, \dots, a_n попарно различны. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \\ \vdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \dots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1}. \end{cases}$$

2. (5 баллов) Функция $f(x)$ дифференцируема на $[x_1; x_2]$ и $0 < x_1 < x_2$. Доказать, что найдется такая точка $\xi \in (x_1; x_2)$, что

$$\frac{x_1f(x_2) - x_2f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

3. (10 баллов) Найти площадь области, ограниченной петлей кривой

$$x^3 + y^3 = 7xy.$$

4. (10 баллов) Найти в целых числах x все решения уравнения

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3.$$

4. Требования к оформлению резюме

Резюме, самостоятельно составленное поступающим, должно быть предоставлено на русском языке, объем – не менее 1 и не более 5 машинописных страниц, шрифт Times New Roman прямого начертания, кегль (размер) шрифта 12, межстрочный интервал – полуторный.

Резюме должно содержать:

- 1) Личную информацию и контактные данные поступающего;
- 2) Фотографию поступающего;
- 3) Сведения об имеющемся у поступающем образовании;

- 4) Опыт работы поступающего;
- 5) Результаты общественной, научной и профессиональной деятельности поступающего (членство в объединениях, организация, опыт волонтерской деятельности, участие в НИР, грантах, значимых проектах);
- 6) Ключевые индивидуальные достижения поступающего;
- 7) Сведения о квалификации и имеющихся у поступающего практических навыках;
- 8) Сведения об уровне владения иностранными языками;
- 9) Список публикаций и объектов интеллектуальной собственности (при наличии);
- 10) Информация о выпускной квалификационной (научно-исследовательской) работе поступающего (тема, кратка аннотация, объемом не более 200 слов);
- 11) Информация о хобби и увлечениях поступающего.

Допускается приводить названия публикаций, грантов, проектов, сертификатов на языке, использованном в оригинале. Перевод в этом случае не обязателен.

При оценке резюме экзаменационная комиссия учитывает индивидуальные достижения, подтвержденные документами, приложенными к заявлению о приеме, в соответствии с пунктом 3.17 Правил.

Максимальная оценка за резюме – 10 (десять) баллов, минимальная – 6 (шесть) баллов.

5. Требования к оформлению исследовательского предложения

Исследовательское предложение должно быть составлено поступающим самостоятельно на русском языке, рекомендуемый объем - не менее 2 и не более 5 страниц, шрифт Times New Roman прямого начертания, кегль (размер) шрифта 12, междустрочный интервал - полуторный. Примерная форма исследовательского предложения:

Исследовательское предложение по теме научного исследования

(наименование темы)

Я, _____, хочу принять участие в конкурсе на обучение по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научных и научно-педагогических кадров

в аспирантуре АНОО ВО «Университет «Сириус» по научной специальности:

_____ (далее – программа аспирантуры).

Выбор обозначенной программы аспирантуры обусловлен (указать причины, которые побудили принять решение о выборе именно этой научной специальности и темы научного исследования; почему выбран именно АНОО ВО «Университет «Сириус», что знаете о нем, о научном центре (коллективе), реализующем соответствующую программу аспирантуры, об их достижениях и направлениях исследований, о лабораторном комплексе АНОО ВО «Университет «Сириус», о федеральной территории «Сириус»);

Необходимо:

- 1) провести оценку актуальности выбранной научной специальности, состояния и перспективы проведения научного исследования по выбранной тематике в рамках обучения в Университете и для страны в целом;
- 2) раскрыть предложения, которые планируется реализовать в рамках научного исследования и предполагаемые результаты, которых планирует достичь;
- 3) указать каким образом поможет имеющийся научный и (или) практический опыт и планы на будущее, при условии успешного завершения аспирантуры.

_____ / _____ / « _____ » _____ 20____ г.

Максимальная оценка за исследовательское предложение-10 (десять) баллов, минимальная - 7 (семь) баллов.

6. Литература для подготовки к вступительным испытаниям

а. Основная

1. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и основы алгебры. URSS, 2025.
2. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Юбилейная серия в честь 270-летия МГУ имени М.В. Ломоносова, Классический учебник МГУ, 2025г.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч.1. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2023.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч.2. Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2023.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч.3: Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2023.
6. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. – МЦНМО, 2026.
7. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. Юбилейная серия в честь 270-летия МГУ имени М.В. Ломоносова, Классический учебник МГУ, 2025.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3 т. учебник для вузов / Л.Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. Москва : Издательство Юрайт, 2026.
9. Фихтенгольц Г.И. Основы математического анализа, В 3-ех частях. Учебник для вузов, 18-е изд., стер. Лань, 2026г.
10. Арнольд В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Литрес, 2022.
11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. URSS, 2024.
12. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. Изд. МГУ, 2025.
13. Бухштаб А.А. Теория чисел 9-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2025.
14. Виноградов И.М. Основы теории чисел. URSS, 2022.
15. Алексеев В.Б. Дискретная математика. М.: Инфра-М, 2021.
16. Дехтярь М.И., Дудаков С. М., Карлов Б.Н. Лекции по дискретной математике – 2021.
17. Чашкин А.В. Дискретная математика. URSS, 2026 г.

в. Дополнительная

1. Кострикин А.И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. 4-е изд. С.-П.: Лань, 2014г.
2. Lang S. Algebra. – Springer Science & Business Media, 2012. (перевод: Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968).
3. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. RUGRAM, 2013.
4. Винберг Э. Б. Курс алгебры. ЛитРес, 2015.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 18-е изд. С.-П.: Лань, 2013г.
6. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2009.
7. Айерленд К., Роузен М., Классическое введение в современную теорию чисел, М.: МИР, 1987.
8. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая Школа, 2001.

с. Цифровые образовательные ресурсы

1. Общероссийский портал Math-Net.Ru <https://www.mathnet.ru/> — Современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным ученым различные возможности в поиске научной информации по математике, физике, информационным технологиям и смежным наукам.
2. Электронный ресурс arXiv <https://arxiv.org/> — Крупнейшим бесплатный архив электронных научных публикаций по разделам физики, математики, информатики, механики, астрономии и биологии. Имеется подробный тематический каталог и возможность поиска статей по множеству критериев