Матричные методы и моделирование в науках о жизни и о Земле
Секция: Интегральные уравнения
Образовательный центр Сириус

Тема: «Стационарная и нестационарная задача распространения акустической волны в симметричной неоднородной среде»

Юрченков Иван Александрович, Прикладная математика ИИТ,
МИРЭА - Российский технологический университет
Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Самохин Александр Борисович

18 августа 2022 г.

Постановка задачи акустики

Рассмотрим следующую задачу распространения акустической волны в среде с индексом рефракции

$$\Delta U(x,t) - \frac{n(x)}{c^2}\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = f_0(x,t),$$

где $U(x,t)$ - неизвестное поле, $n(x)$ - индекс рефракции, c – скорость звука в свободном пространстве, $f_0(x,t)$ - внешний источник

Применяя преобразование Фурье к правой и левой части получим:

$$\Delta U(x,\omega) - \frac{n(x)\,\omega^2}{c^2} U(x,\omega) = f_0(x,\omega)$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\left(\frac{\partial U}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}U\right)\right) = 0, \quad r = |x| = \|x\| = \sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}.$$

Постановка задачи акустики

Следующее интегральное представление относительно $f(x,\omega)$, $x \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет в $\mathbb{R}^3$ уравнению Гельмгольца и условию излучения на бесконечности:

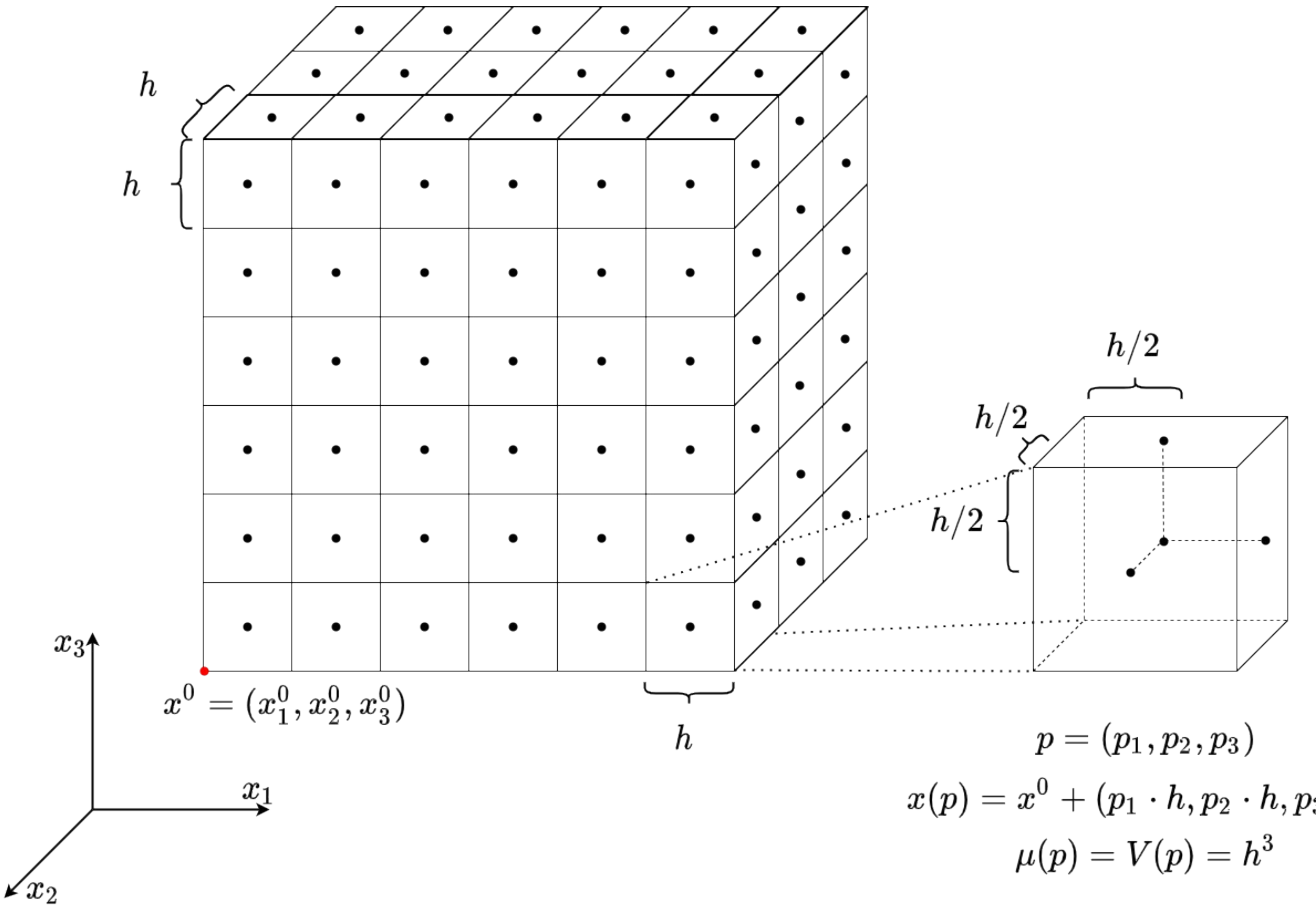
$$V(x,\omega) = -\int f(y,\omega) G(R,\omega) dy \to \Delta V + \frac{\omega^2}{c^2} V = f$$

$$G(R,\omega) = exp(i\omega R/c)/(4\pi R), \quad R = |x-y|, \quad x = (x_1,x_2,x_3), \quad y = (y_1,y_2,y_3)$$

$$\Delta U + (\omega/c)^2 U = f_0 - (\omega/c)^2 (n-1) U.$$

$$U(x,\omega) - \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) \int_Q (n(y)-1) U(y,\omega) G(R,\omega) dy = -\int f_0(y,\omega) G(R,\omega) dy, \quad x, y \in \mathbb{R}^3$$

Дискретизация задачи



$$p = (p_1, p_2, p_3)$$

$$x(p) = x^0 + (p_1 \cdot h, p_2 \cdot h, p_3 \cdot h)$$

$$\mu(p) = V(p) = h^3$$

Дискретизация задачи

$$U(x,\omega)-\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)\int_Q (n(y)-1)U(y,\omega)\,G(R,\omega)\,dy=-\int_Q f_0(y,\omega)\,G(R,\omega)\,dy,\quad x,y\in\mathbb{R}^3$$

$$U\left(p^i,\omega\right)=U_i,\quad G\left(\left\|p^i-q^j\right\|,\omega\right)=G_{ij},\qquad f_0\left(p^i,\omega\right)=f_i,\quad \left(n\left(p^i\right)-1\right)=\tilde{n}_i$$

$$U(x(p),\omega)-k^2\sum_{q\in Q}(n(x(q))-1)U(x(q),\omega)\int_q\frac{e^{ik\,|x(p)-y|}}{4\pi\,|x(p)-y|}dy=-\sum_q f(x(q),\omega)\int_q\frac{e^{ik|x(p)-y|}}{4\pi\,|x(p)-y|}\,dy$$

Решаем следующее операторное уравнение

$$U_i-k^2\sum_j\cdot B_{ij}\left(n_jU_j\right)=U_i^0,\quad B_{ij}=\int_{q_j}\frac{e^{ik|x(p)-y|}}{4\pi\,|x(p)-y|}\,dy,\quad i=1,\dots N$$

Метод решения операторного уравнения

$$Ax = b$$

$$r^0 = b - Ax^0,\ \tilde{r} = r^0, \rho^0 = \alpha^0 = \omega^0 = 1$$

$$v^0 = p^0 = 0$$

$$\rho^k = \left(\tilde{r}, r^{k-1}\right),\ \beta^k = \frac{\rho^k}{\rho^{k-1}} \frac{\alpha^{k-1}}{\omega^{k-1}}$$

$$p^k = r^{k-1} + \beta^k \left(p^{k-1} - \omega^{k-1} v^{k-1}\right)$$

$$v^k = Ap^k,\ \alpha^k = \frac{\rho^k}{\left(\tilde{r}, v^k\right)}$$

$$s^k = r^{k-1} - \alpha^k v^k,\ t^k = As^k$$

$$\omega^k = \frac{\left[t^k, s^k\right]}{\left[t^k, t^k\right]}$$

$$x^k = x^{k-1} + \omega^k s^k + \alpha^k p^k$$

$$r^k = s^k - \omega^k t^k$$

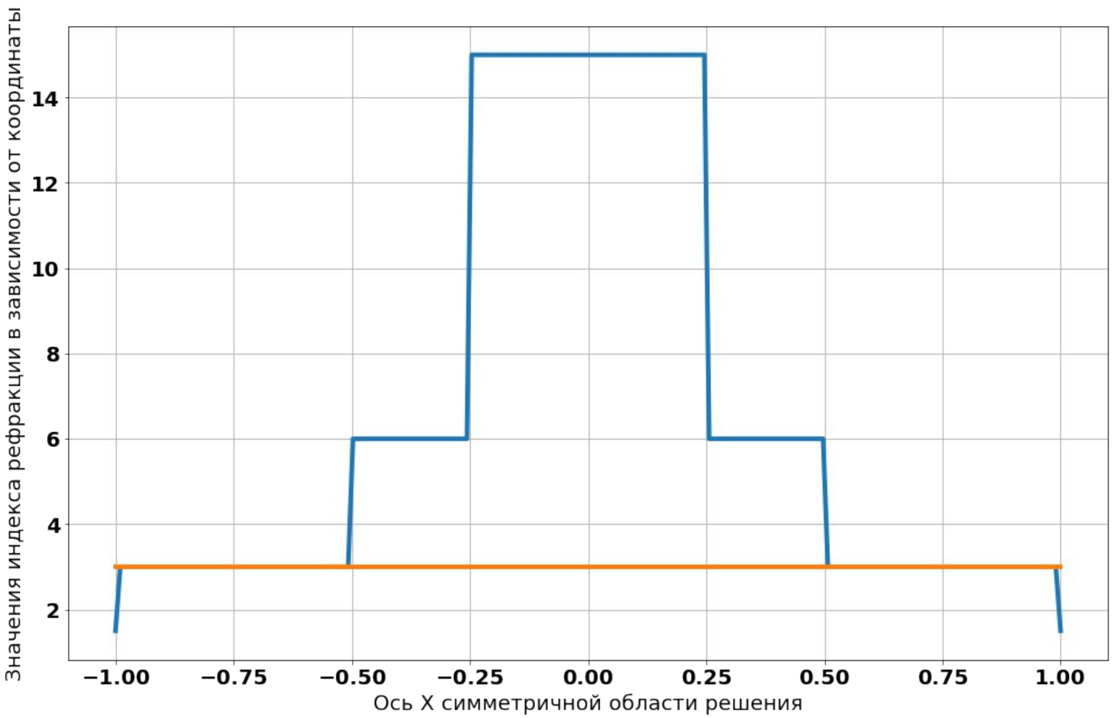
$$[x,y] = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_j; \qquad (x,y) = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{x}_i \cdot y_j; \qquad ||x|| = \sqrt{(x, x)}; \qquad \frac{||r_k||}{||f||} < \varepsilon$$

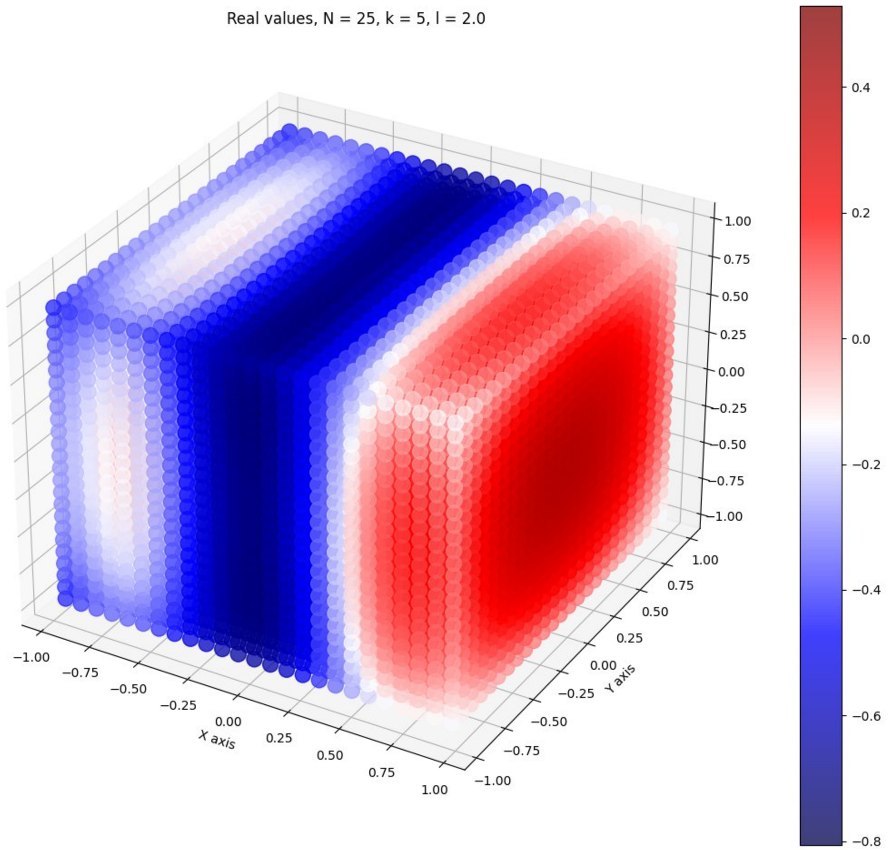
Индекс рефракции среды

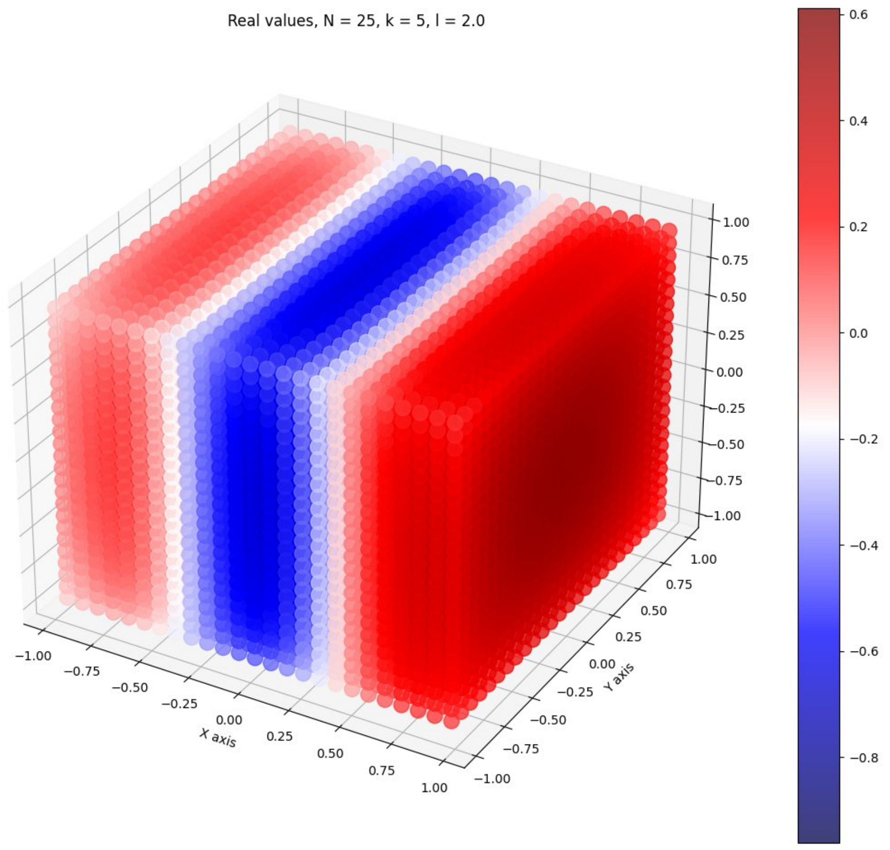
Индекс рефракции $n(y)$ в акустической задаче входит в исходную интегральную постановку под интеграл по симметричной области решения и задается функцией координат

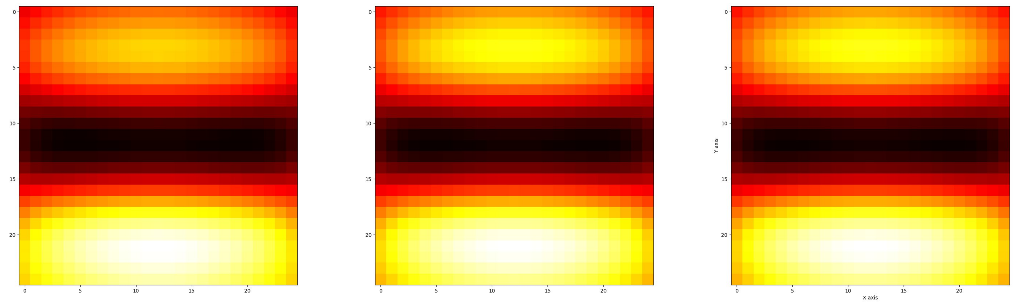
$$Ax = b, \text{ где } A = (I - nG), \text{ то}$$
$$Ax = x - G(n \cdot x)$$

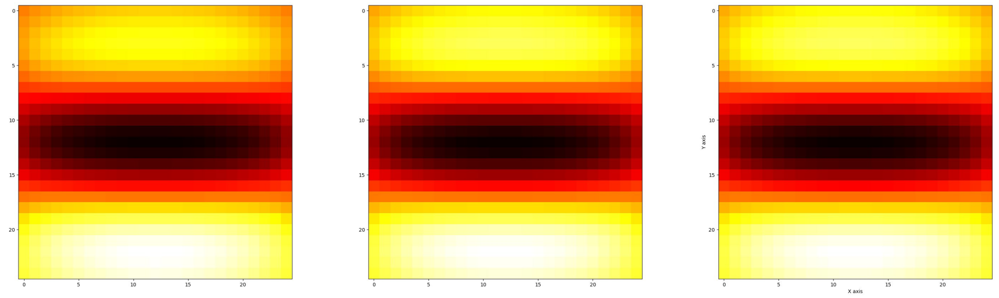
Пример задания *n(y), y* = (y_1, y_2, y_3) как функции только от одной координаты, *задающей плоские неоднородные слои*



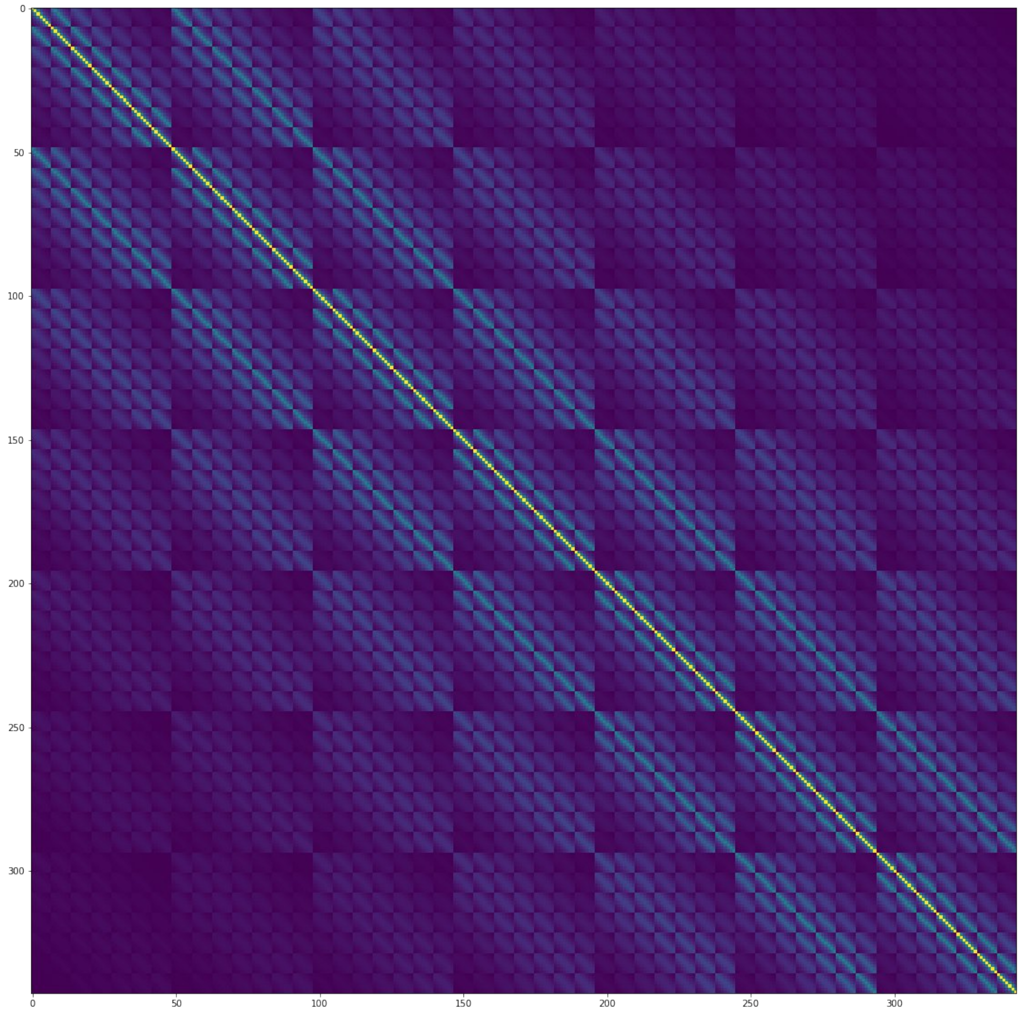

Real values, N = 25, k = 5, l = 2.0
X axis
Y axis


Real values, N = 25, k = 5, l = 2.0
X axis
Y axis





Особенности ядра интегрального уравнения



$$B = b_{ij} = \int_{q_j} G\left(|x_i - y|\right) dy = F(x - y)$$

$$T(n-l) = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-N+1} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-N+2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & t_{-N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_{N-1} & t_{N-2} & t_{N-3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$$

Умножение Тёплицевой матрицы на вектор

$$T(n-l) = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-N+1} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-N+2} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & t_{-N+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_{N-1} & t_{N-2} & t_{N-3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$$

$$C(T) = (t_0, t_{-1}, \dots, t_{-N+1}, 0, t_{N-1}, \dots, t_2, t_1)$$

$$f_C = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}, 0, \dots, 0, 0)$$

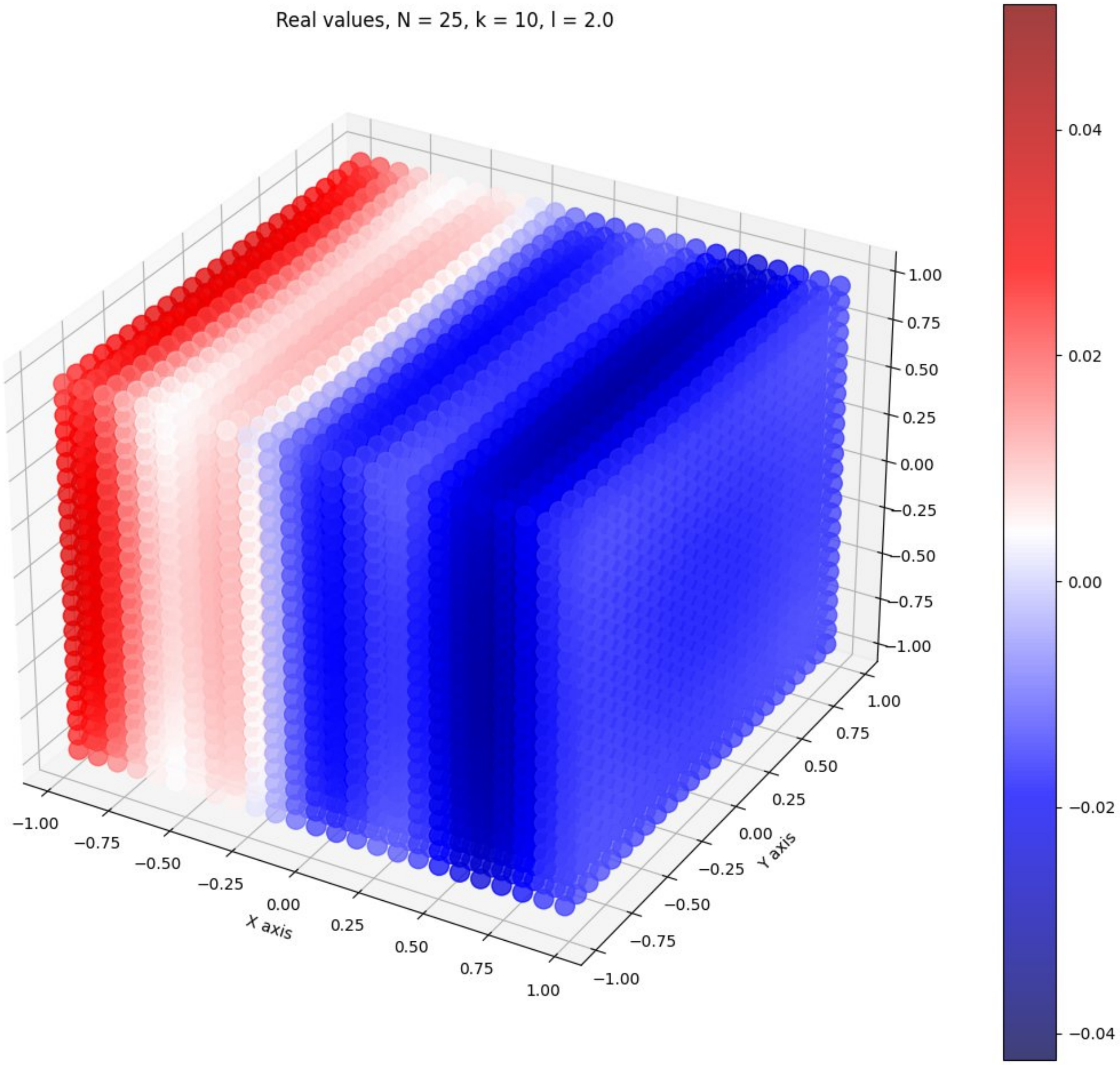
$$S(n) = (s_0, s_1, \dots s_{N-1}),\ n = 0, \dots, N-1$$

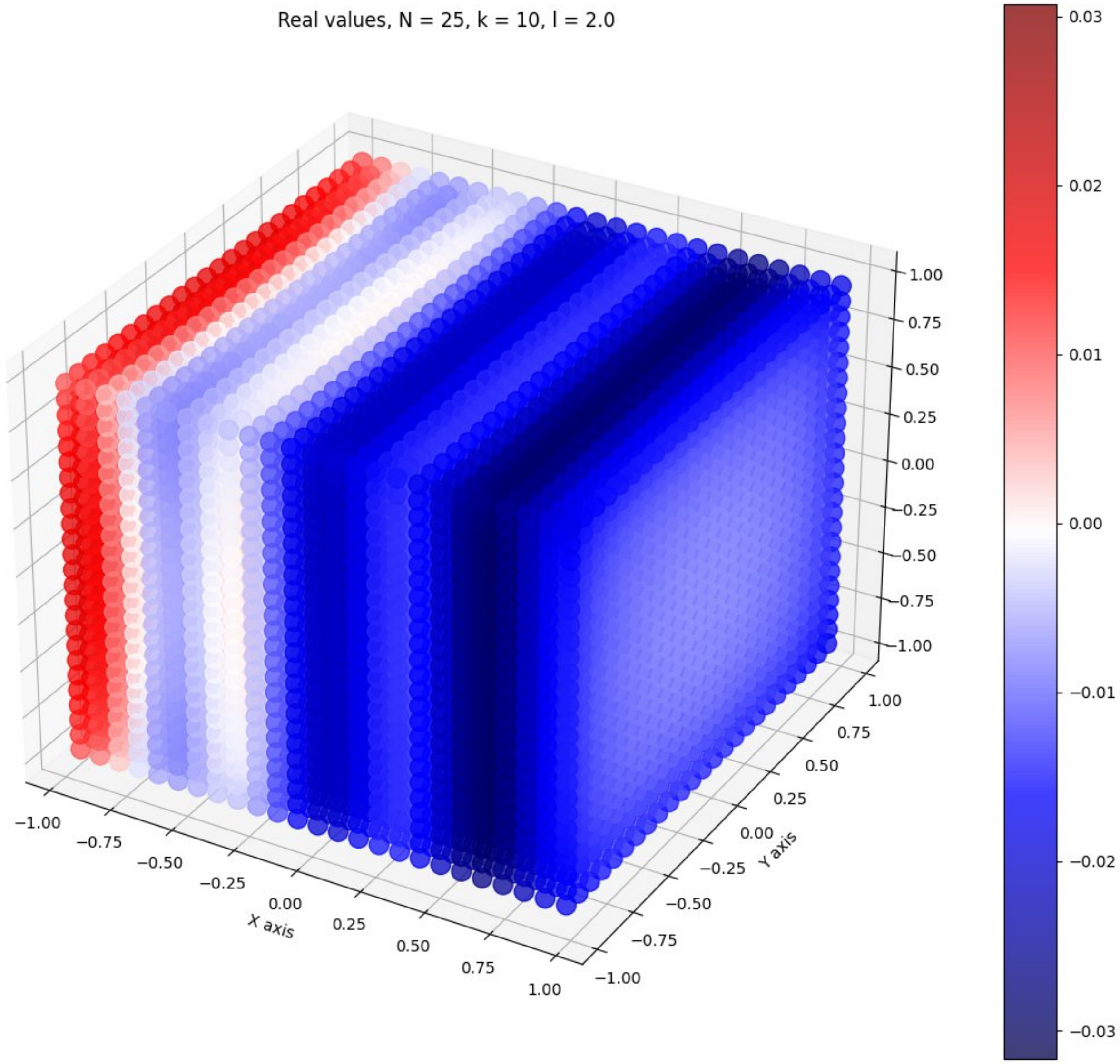
$$\tilde{S}(k) = \left(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{N-1}\right),\ k = 0, \dots, N-1$$

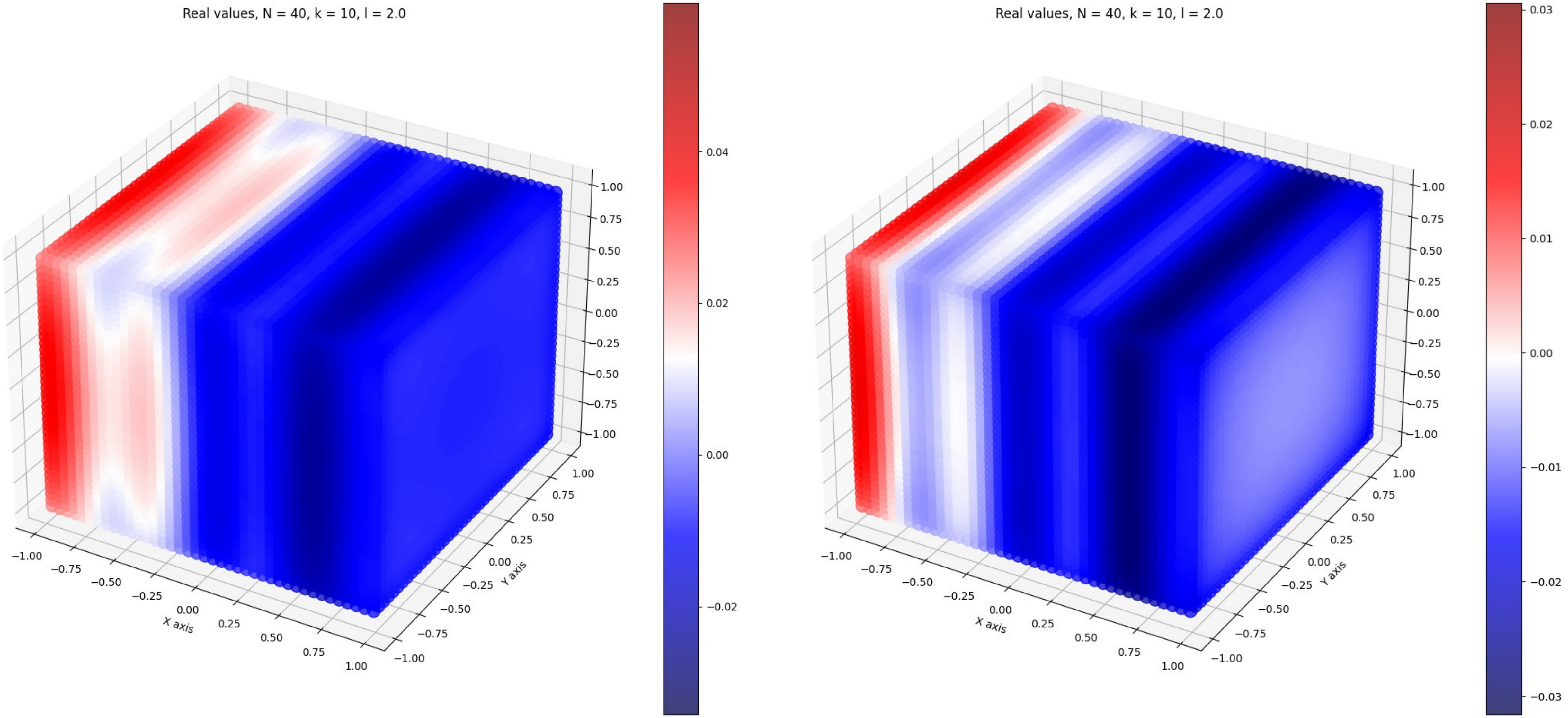
$$\tilde{S}(k) = F[S(n)] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n) \cdot exp(-1i \cdot T \cdot n \cdot k/N)$$

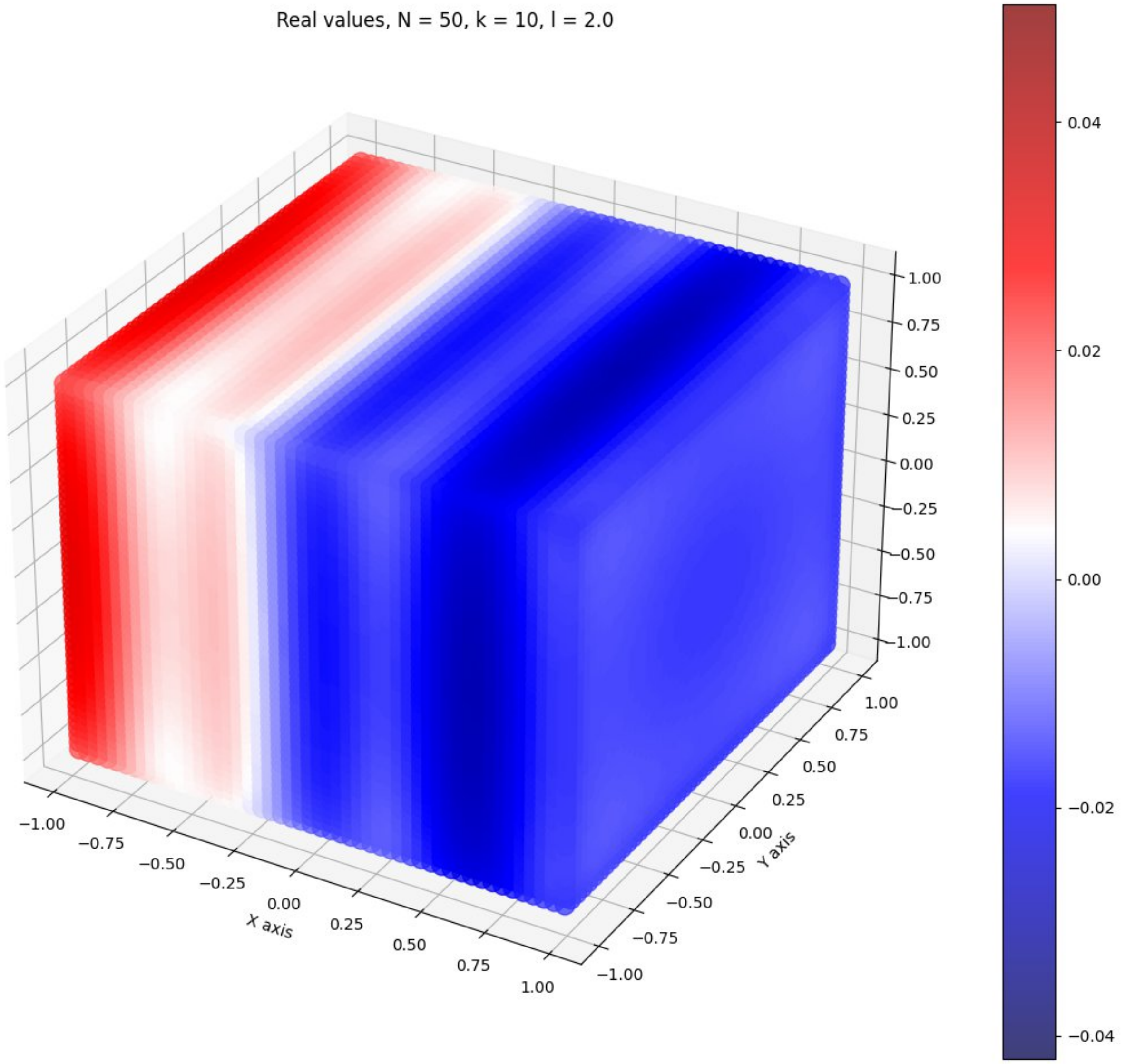
$$S(n) = F^{-1}\left[\tilde{S}(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}(k) \cdot exp(1i \cdot T \cdot n \cdot k/N)$$

$$T \cdot f \approx F^{-1}[F[C(T)] \circ F[f_C]]$$

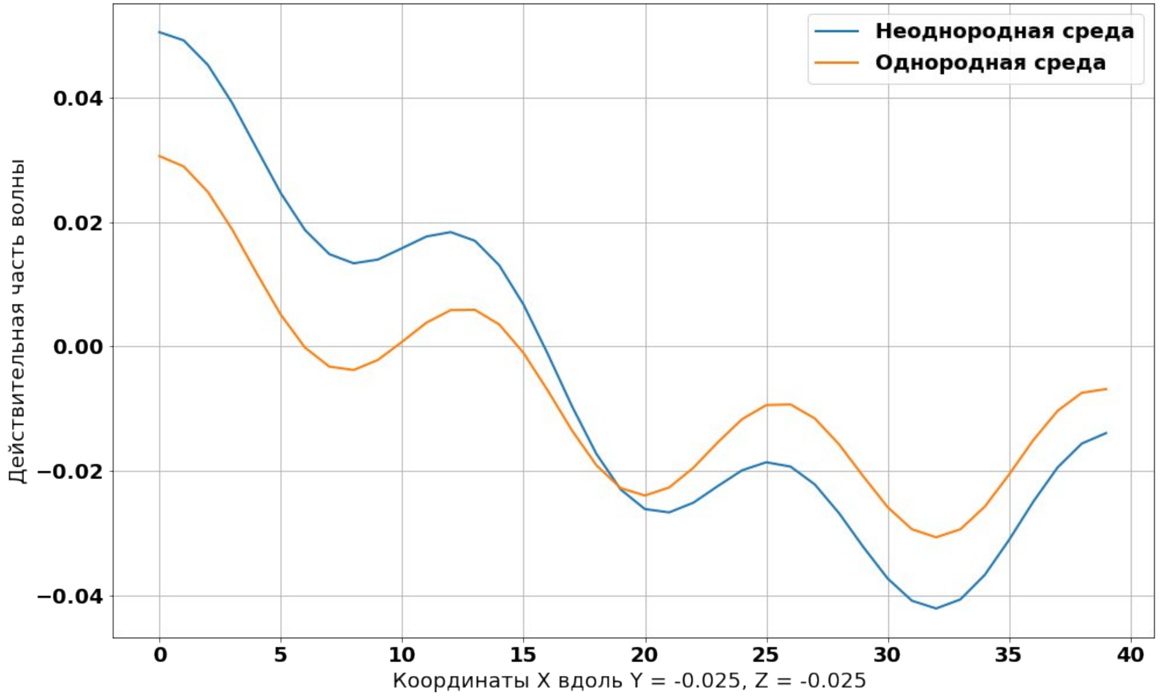

Real values, N = 25, k = 10, l = 2.0
X axis
Y axis
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04


Real values, N = 25, k = 10, l = 2.0
X axis
Y axis
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
0.03
0.02
0.01
0.00
−0.01
−0.02
−0.03

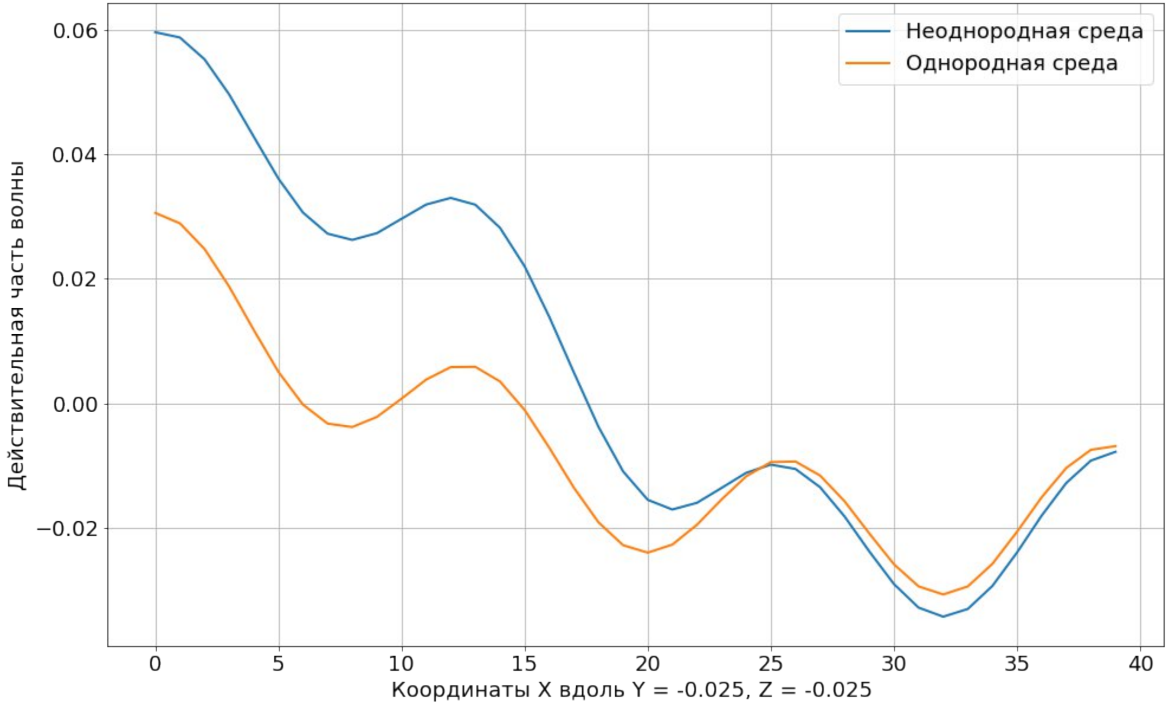

Real values, N = 40, k = 10, l = 2.0
X axis
Y axis
Real values, N = 40, k = 10, l = 2.0
X axis
Y axis



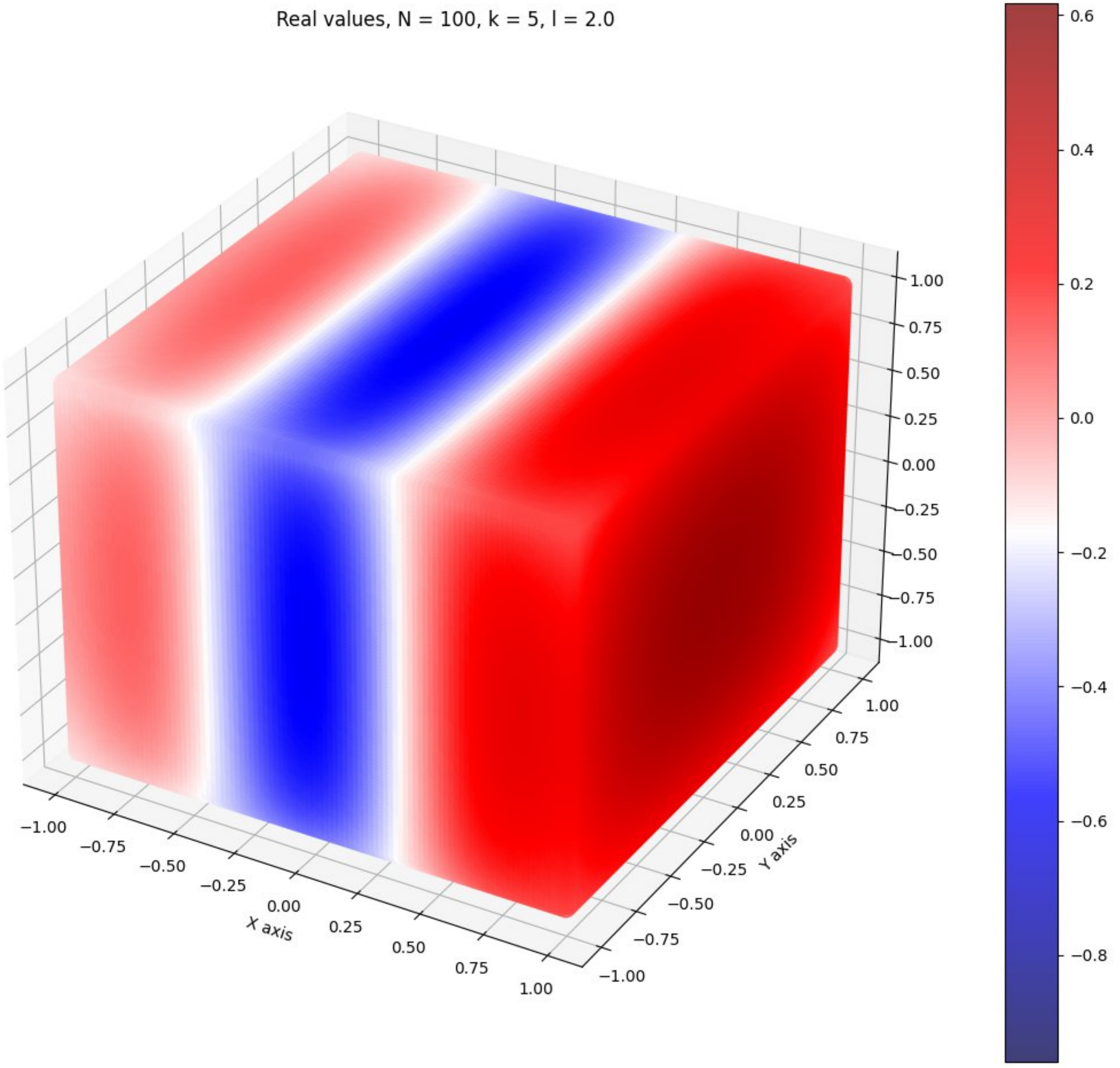
Real values, N = 50, k = 10, l = 2.0
X axis
Y axis



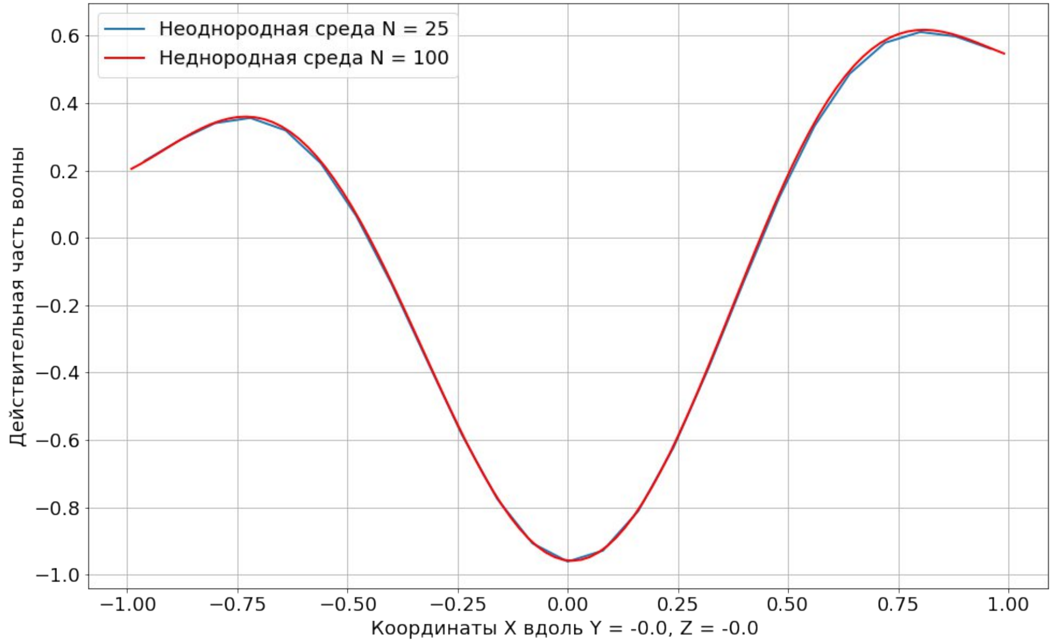
Неоднородная среда
Однородная среда
Действительная часть волны
Координаты X вдоль Y = -0.025, Z = -0.025



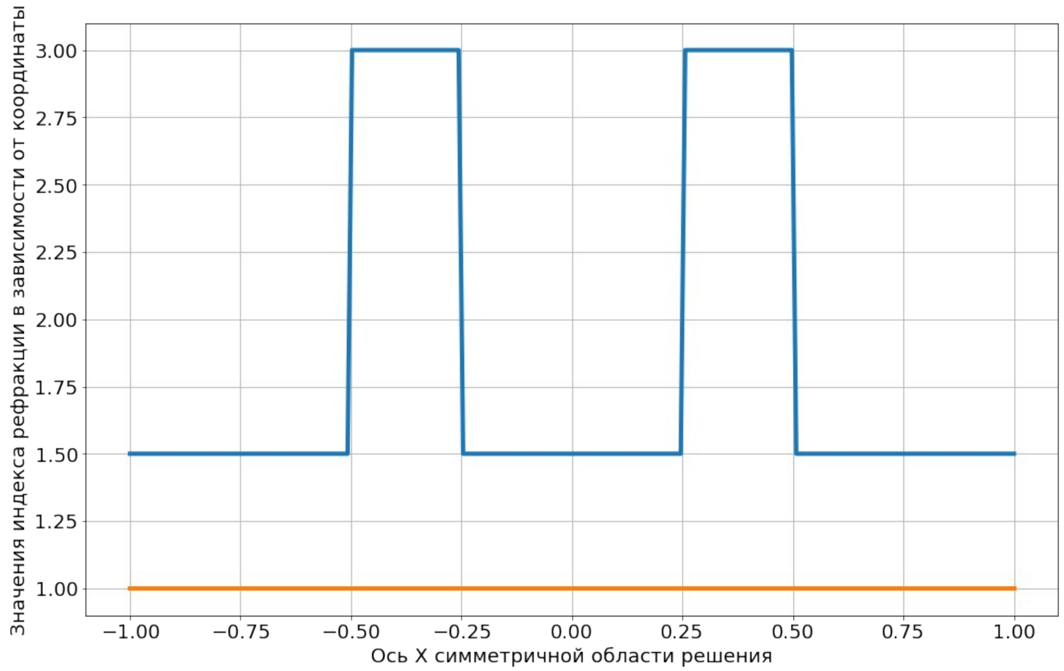
Неоднородная среда
Однородная среда
Действительная часть волны
Координаты X вдоль Y = -0.025, Z = -0.025



Real values, N = 100, k = 5, l = 2.0
X axis
Y axis



Неоднородная среда N = 25
Недноpодная среда N = 100
Действительная часть волны
Координаты X вдоль Y = -0.0, Z = -0.0



Значения индекса рефракции в зависимости от координаты
Ось X симметричной области решения

Постановка нестационарной задачи акустики

$$U(x,\omega)-\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)\int_Q (n(y)-1)U(y,\omega)\,G(R,\omega)\,dy=-\int_Q f_0(y,\omega)\,G(R,\omega)\,dy,\quad x,y\in\mathbb{R}^3$$

$$U(x,t)=U_0(x,t)-\frac{1}{4\pi c^2}\int_Q \frac{1}{R}(n(y)-1)\,\frac{\partial^2 U(y,\tau)}{\partial\tau^2}dy,$$

$$R=|x-y|;\quad \tau=t-R/c;\quad U(x,t)=0 \text{ при } t<0.$$

$$F^{-1}\left[-\omega^2 f(\omega)\right]=\frac{d^2 f(t)}{dt^2},\quad F^{-1}[f(\omega)g(\omega)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau,\quad F^{-1}[e^{i\omega\Delta}]=\delta(t-\Delta)$$

$$F^{-1}[G(R,\omega)]=\left(4\pi R\right)^{-1}\delta(t-R/c).$$

$$F^{-1}\left[G(R,\omega)\,\omega^2 f(y,\omega)\right]=-(4\pi R)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-R/c)\,\frac{\partial^2 f(y,t-\tau)}{\partial t^2}d\tau\right)=-(4\pi R)^{-1}\frac{\partial^2 f(y,\tau)}{\partial\tau^2},\quad \tau=t-R/c.$$

Дискретизация нестационарной постановки

Введём сетку по времени $t(0),t(1),t(2),\ldots$ с постоянным шагом δ, где $t(0)=0$ – начало процесса. Будем обозначать через $V(p,t(n))$ значение функции в p-й пространственной узловой точке и в узловой точке по времени $t(n)=n\delta, n=0,1,2,\ldots$,
$V(q,\tau(n,p,q))$ – значение функции в q-й пространственной узловой точке и во временной точке

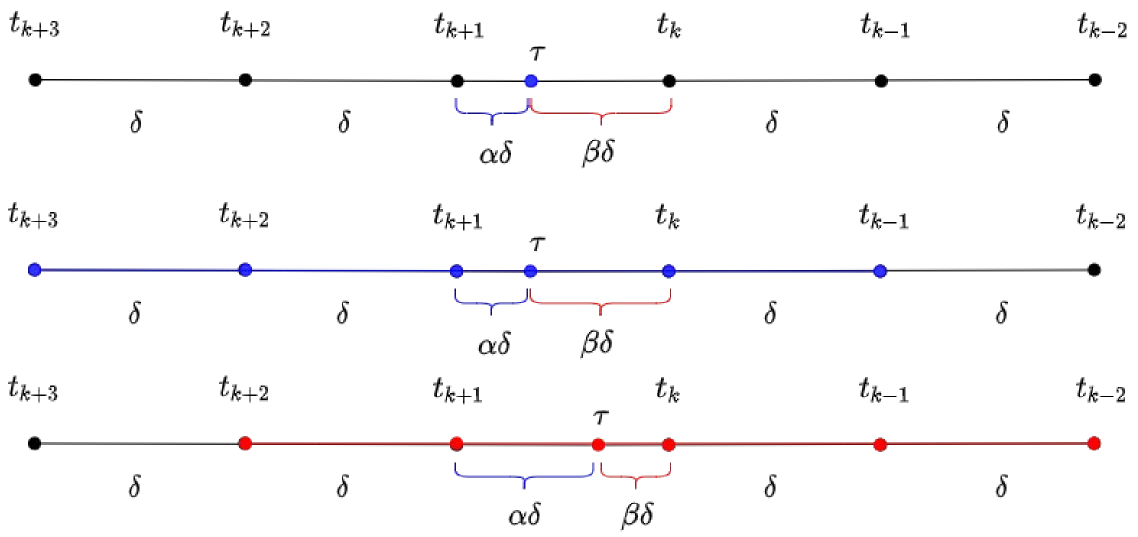
$$\tau(n,p,q)=n\delta-|x(p)-x(q)|/c.$$

$$U(p,t)=U_0(p,t)+B(0)\frac{\partial^2 P(p,t)}{\partial t^2}+\frac{1}{c^2}\sum_{q\in Q,\, q\neq p} B(p-q)\frac{\partial^2 P(q,\tau)}{\partial \tau^2},\ p\in Q,\ n=1,2,3,\ldots,$$

$$P(q,\tau)=(n(q)-1)\,U(q,\tau),\quad t=t(n),\qquad \tau=\tau(n,p,q),\qquad B(p-q)=-\int_{\Pi(q)}\frac{1}{4\pi|x(p)-y|}dy.$$

Разностные схемы дифференцирования

$$\frac{d^2P(\tau)}{d\tau^2} \approx \frac{1}{\delta^2}\sum_{j=-1}^{1} \beta_j P(m(\tau)+j), \quad m(\tau/\delta) = \begin{cases} [\tau/\delta], & \text{если} \quad \tau/\delta \le [\tau/\delta]+1/2, \\ [\tau/\delta]+1, & \text{если} \quad \tau/\delta > [\tau/\delta]+1/2, \end{cases}$$



$$\frac{\partial^2 P(q,t-\tau)}{\partial t^2} \approx \frac{-P(q,t_{k+2})+16P(q,t_{k+1})-30P(q,t_k)+16P(q,t_{k-1})-P(q,t_{k-2})}{12(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P(q,t-\tau)}{\partial t^2} \approx \frac{P(q,t_{k+1})-2P(q,t_k)+P(q,t_{k-1})}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 P(q,t-\tau)}{\partial t^2} \approx \frac{(1+\beta)P(q,t_{k+2})-(1+\beta)\cdot(1+\alpha)\cdot P(q,t-\tau)+(1+\alpha)\cdot P(q,t_{k-1})}{(\Delta t)^2\cdot(1+\alpha)\cdot(1+\beta)}$$

$$P(q,t-\tau) = \alpha P(q,t_{k+1}) + \beta P(q,t_k), \quad \alpha+\beta=1$$

Список использованных источников

1. ОБЪЁМНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ АКУСТИКИ / А. Б. Самохин, А. С. Самохина, И. А. Юрченков // ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2021. том 57. № 9. С. 1273–1279 // DOI: 10.31857/S0374064121090120
2. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ / А.Б. Самохин, А.С. Самохина, А.Я. Скляр, Ю.В. Шестопалов // ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. 2019. том 59. № 8. С. 1331–1339. // DOI: 10.1134/S0044466919080143
3. Самохин А.Б. Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики / А.Б. Самохин. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2021. – 218 с. ISBN 978-5-94836-618-0
4. Самохин А.Б., Самохина А.С., Кобаяси К. Численные методы решения нестационарного объёмного сингулярного интегрального уравнения электродинамики // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1293–1300
5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И.К. Лифанов. - М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с. ISBN 5-88929-003-7

Спасибо за внимание