Применение функционального уравнения тета-функции к суммированию конкретного ряда

Смирнов Матвей

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Матвеев С.А.

Сириус
Сочи, 2022

Рассматриваемые ряды

- $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-tn^2}$$
- $$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 e^{-tn^2}$$
- $g(t) = f'(t)$.
- Функция $g(t)$, $t > 0$ возникает как плотность вероятности времени выхода для случайных блужданий на сфере.[1]
- Проблема вычисления ряда $g(t)$: знакопеременность, малая сумма больших слагаемых.

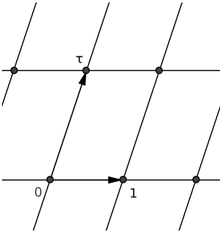
[1] K. Sabelfeld. “Random walk on spheres algorithm for solving transient drift-diffusion-reaction problems”. In Monte Carlo Meth. and App., 23.3 (2017).

Тета-функция Якоби

Предлагаемый метод вычисления основан на применении теории тета-функций:[2]

- $\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 \tau + 2i\pi nz}$, $z, \tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \tau > 0$.
- $f(t) = \frac{\theta(1/2, it/\pi) - 1}{2}$.
- Функциональное уравнение тета-функции:

$$\theta(z, \tau)\sqrt{-i\tau}e^{\pi i z^2/\tau} = \theta(z/\tau, -1/\tau).$$



[2] D. Mumford. "Tata lectures on theta". Birkhäuser Boston, MA. 2007.

Преобразование рядов

Используя функциональное уравнение, нетрудно получить:

- $f(t) = \left(-1 + \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\pi^2/4t} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2(n^2-n)/t}\right) \Big/ 2.$
- $$g(t) = e^{-\pi^2/4t}\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{t^3}} + \sqrt{\frac{\pi}{t}}\frac{\pi^2}{8t^2}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2(n^2-n)/t} + e^{-\pi^2/4t}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\frac{\pi^2}{2t^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n^2-n)e^{-\pi^2(n^2-n)/t}.$$
- В новых представлениях отсутствует знакопеременность.

Асимптотики рядов

- $f(t) + 1/2 \sim Ae^{-\pi^2/4t}t^{-1/2}$.
- $g(t) \sim Be^{-\pi^2/4t}t^{-5/2}$.

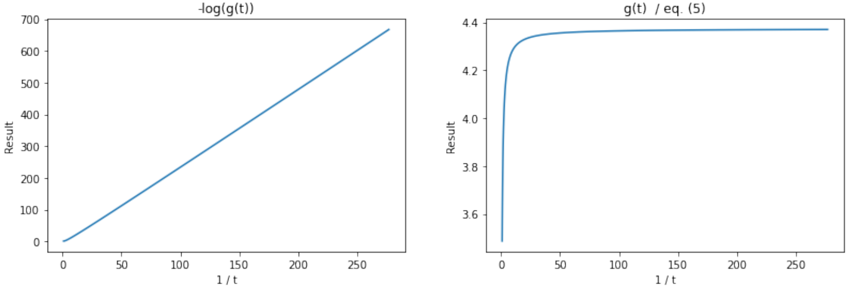


Рис.: Слева график $-\log g(t)$, справа график $\dfrac{g(t)}{e^{-\pi^2/4t}t^{-5/2}}$. В качестве оси x взято $1/t$.

Сравнение прямого суммирования со стабильным

t	Pairwise grouping	Stabilized summation
0.083905452888240015	3.5696737844691016e-10	3.5696660979820847e-10
0.076277684443854549	2.3970347365795254e-11	2.3969848229036882e-11
0.069343349494413217	1.1976930712015407e-12	1.1992987255711278e-12
0.063039408631284738	**4.4347660742538135e-14**	**4.3415867381141509e-14**
0.057308553301167936	7.3408930578846932e-16	1.100995506351283e-15
0.052098684819243575	6.7783881379810582e-18	1.8875138702811571e-17
0.047362440744766886	-6.7255110853350989e-16	2.103623935637239e-19
0.043056764313424437	9.6551460785839898e-16	1.4599061592871022e-21
0.039142513012204033	-1.5819058900458517e-16	6.0172213652363752e-24
0.035584102738367297	1.4343851597393674e-15	1.3981681762844804e-26
0.032349184307606631	6.0324290613139625e-15	1.7295398281154446e-29
0.029408349370551479	5.1088900868022932e-15	1.0693891532395799e-32
0.026734863064137707	2.5978811231428795e-15	3.0836386132566619e-36
0.024304420967397912	-2.7520836199664593e-15	3.8422930730979101e-40
0.022094928152179918	-3.8967871529198896e-16	1.9023082500595339e-44
0.020086298320163561	4.3385336052321997e-15	3.4123595893455456e-49

Рис.: Момент потери стабильности суммирования исходного ряда ($t \sim 0.06$).

Спасибо за внимание!