Применение двухшагового метода для определения параметров неоднородного тела в прямоугольном волноводе

А.О. Лапич, Ю.К. Тулякова, Л.В. Козырева
(ПГУ)
lapich.a@yandex.ru

Образовательная программа
«Матричные методы и моделирование в науках о жизни и земле»
Направление: интегральные уравнения

НТУ Сириус
2022

Введение

Рассмотрим обратную задачу определения волновой функции неоднородного тела, помещенного в прямоугольный волновод. Такие задачи имеют практическое значение при исследовании метаматериалов и нанокомпозитных материалов, а также при моделировании материалов с заданными свойствами [1, 2, 3, 4].

J. Baena, L. Jelinek., R. Marques, and F. Medina Near-perfect tunneling and amplification of evanescent electromagnetic waves in a wave guide filled by a metamaterial: Theory and experiments, Phys.Rev. B.72, 075116 (2005).

E. Eves, K. Murphy, and V. Yakovlev Reconstruction of complex permittivity with neural-networkcontrolled FDTD modelling, Power Electromag. Energy. 4 (41) 22 (2007).

Tao Pan, Guo-Ding Xu, Tao-Cheng Zang, and Lei Gao Study of a slab waveguide loaded with dispersive anisotropic, Applied Physics A. 95 367–372 (2009).

D. Usanov, A. Skripal, and A. Romanov Complex permettivity of composites based on dielectric matrices with carbon nanotrubes, Technical Physics. 56 (1) 102-106 (2011).

Постановка задачи

Пусть объемное тело Q с кусочно-гладкой границей ∂Q располагается в прямоугольном волноводе

$$P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < +\infty\}.$$

Тело Q характеризуется волновым числом k^2.

Будем решать следующую задачу дифракции. Необходимо найти полное поле u на теле Q. Поле u индуцируется источником j_0.
Мы ищем «слабые» (обобщенные) решения уравнения

$$\Delta u + k^2(x)u = 0, \qquad (1)$$

Поле u должно удовлетворять следующему граничному условию на стенках волновода:

$$u|_{\partial\rho} = 0. \qquad (2)$$

Постановка задачи

Также будем считать, что u_0 — известное поле (падающая волна), являющееся решением уравнения

$$\Delta u_0 + k^2(x)u_0 = 0 \tag{3}$$

с граничными условиями

$$u_0|_{\partial\rho} = 0, \tag{4}$$

в отсутствие Q, то есть $k^2(x) = k_0^2(x), x \in P$.

Решение u задачи (1) может быть выражено аналитически через функцию Грина

$$G = \frac{2}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}}\sin\frac{\pi n}{a}x_1\sin\frac{\pi m}{b}x_1\sin\frac{\pi n}{a}y_1\sin\frac{\pi m}{b}y_2.$$

Постановка задачи

Здесь

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2},$$

ветвь квадратного корня выбирается так, что $\mathbf{Im}\,\gamma_{nm} \geq 0$ и $\mathbf{Re}\,\gamma_{nm} \geq 0$, где $\mathbf{Im}\,\gamma_{nm} = 0$.

Задача (1)–(4) сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению относительно поля u:

$$u(x) = u_0(x) + k_0^2 \int\limits_Q G(x,y) \left(\frac{k^2(y)}{k_0^2} - 1\right) u(y)dy. \qquad (5)$$

Обратная задача дифракции

Обратная задача состоит в определении волновой функции тела Q в волноводе P путем измерения рассеянного поля вне тела. Рассеянное поле измеряется в так называемых точках наблюдения (x_c), расположенных на поверхности S.

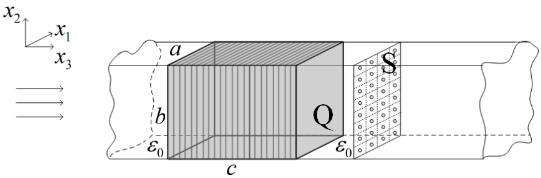

Рис. 1. Тело Q внутри волновода и схематическое расположение точек наблюдения на поверхности S.

Обратная задача дифракции

Мы можем получить более точные результаты реконструкции неоднородности, размещая точки наблюдения в нескольких параллельных поверхностях, равноудаленных друг от друга.

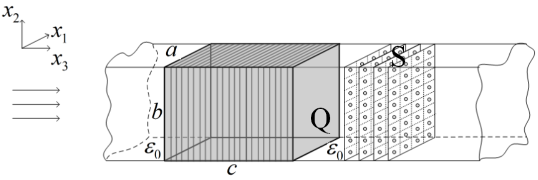

Рис. 2. Пример расположения точек наблюдения x_c на нескольких параллельных поверхностях S.

Предлагаемый метод позволяет восстановить волновую функцию тела произвольной формы. Предположим, что тело Q находится внутри параллелепипеда Θ,

$$\Theta = \{\, x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2 \},$$

$$0 \le a_1 < a_2 \le a, 0 \le b_1 < b_2 \le b, c_1 < x_3 < c_2,$$

который находится в волноводе, $Q \subset \Theta$. Выбираем правильную прямоугольную сетку в Θ размера $N_1 \times N_2 \times N_3$. Сетка состоит из параллелепипедов

$$\begin{aligned}\Theta_{klm} = \{x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, \quad x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, \\ x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},\end{aligned} \tag{6}$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3} m,$$

$$k = 0, \ldots, N_1 - 1,\ l = 0, \ldots, N_2 - 1,\ m = 0, \ldots, N_3 - 1.$$

Шаг по каждой координате постоянен. Определим сеточные базисные функции $f_{k,l,m}$ следующим образом:

$$f_{k,l,m} = \begin{cases} 1, x \in \overline{\Theta}_{klm} \\ 0, x \notin \overline{\Theta}_{klm}. \end{cases} \quad (7)$$

Матрица для нахождения неизвестных коэффициентов α_k:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right).$$

Введем обозначения $i = \{k, l, m\}$.
Элементы столбцов B_j и матрицы A_{ij} определяются из соотношений

$$B_j = u_0(x_j),$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} f_i(x_j) - k_0^2 \int_Q G(x_j, y) f_i(y) dy, \quad (8)$$

где координаты точек коллокации имеют вид:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), x_{i1} = (i_1 + 0.5)h_1, x_{i2} = (i_2 + 0.5)h_2,$$

$$x_{i3} = (i_3 + 0.5)h_3, k, l = 1, 2, 3; i, j = 1, \ldots, N.$$

Предположим, что тело Q состоит из q подобластей Q_i: $Q = \bigcup_j Q_j$, $Q_i \bigcap Q_j = \varnothing$, $i \neq j$. Кроме того, подобласти Q_i должны состоять из объединения элементарных параллелепипедов сетки $Q_j = \bigcup_\eta \Theta_\eta$, $\eta = 0, \ldots, N$, здесь N - общее количество ячеек. Источник поля представляет собой плоскую волну (идущую из бесконечности) вида

$$u_0(x) = A^{(+)} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right) e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3}. \tag{9}$$

Будем вычислять дифрагированное поле при наблюдении в точках x_c. Для этого решим прямую задачу дифракции (1)–(4) и определим поле $u(x)$ внутри тела Q, решая уравнение (5) для $x \in Q$. Используя поле, рассчитанное на предыдущем шаге, мы решаем уравнение (10) методом коллокаций в точке наблюдения $x = x_c$:

$$u(x_c) = u_0(x_c) + k_0^2 \int\limits_Q G(x_c, y)\left(\frac{k^2(y)}{k_0} - 1\right) u(y) dy, \tag{10}$$

Затем решаем (5) относительно неизвестной функции u и находим $k^2(y)$ по формуле

$$\mathrm{J}(y) = \left(\frac{k^2(y)}{k_0^2} - 1\right) u(y). \tag{11}$$

В качестве примера приведем визуализацию результатов определения волновой функции тела Q в волноводе. Тело представляет собой прямоугольный параллелепипед размеров $a = 0,02\ m, b = 0,02\ m, c = 0,02\ m$. Волновое число вне тела равно $k_0 = 250\ m^{-1}$. Размер расчетной сетки $10 \times 10 \times 10$. Решая прямую задачу, определяем «исходное» распределение поля вне тела на поверхностях S.

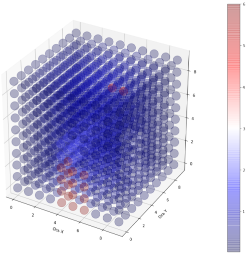

Рис. 3. «Исходное» распределение волновой функции.

На рис. 4 показано восстановленное распределение модуля волновой функции тела Q. Шум не вносится в начальные значения.

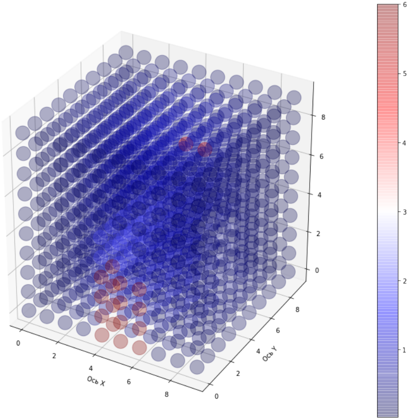

Рис. 4. Восстановленное распределение значения волновой функции тела Q без введения шума.

На рис. 5 показано восстановленное распределение модуля волновой функции тела Q. Шум порядка 1% вводится в начальные значения.

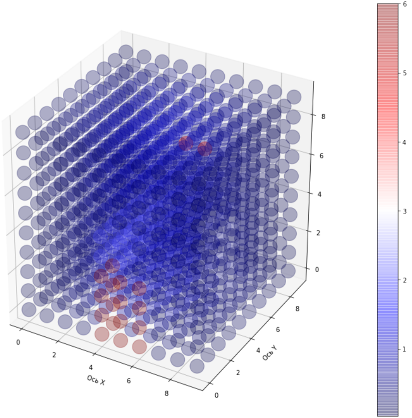

Рис. 5. Восстановленное распределение модуля волновой функции тела Q (шум 1%).

На рис. 6 показано восстановленное распределение модуля волновой функции тела Q. Шум порядка 5% вводится в начальные значения.

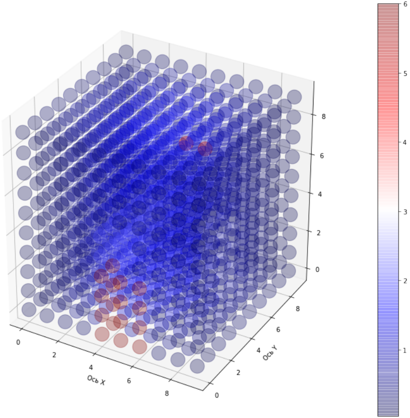

Рис. 6. Восстановленное распределение модуля волновой функции тела Q (шум 5%).

Заключение

Нелинейная задача восстановления волновой функции неоднородного тела, помещенного в волновод, сводится к решению линейной задачи и пересчетов волновой функции. Предлагаемый алгоритм реализуется в два этапа. Преимущество этого метода заключается в том, что выбор начального значения не требуется. Этот метод также позволяет выявить большое количество неоднородностей. Предлагаемый способ также позволяет восстановить волновую функцию анизотропного тела. Метод может быть эффективно использован для определения волновой функции тела произвольной формы.

Спасибо за внимание!