

Матричные методы и моделирование в науках о жизни и Земле
Секция: Интегральные уравнения и их приложения
Образовательный центр Сириус

О различных методах решения задачи рассеяния на сфере с
помощью граничных интегральных уравнений

Масс Илья Александрович, Понкратова Дарья Витальевна, Сетуха Елена
Алексеевна,
Научные руководители: Сетуха Алексей Викторович, Третьякова Руфина
Максимовна

Образовательный центр Сириус

19 августа 2022 г.

Уравнения Максвелла для напряженностей электрического и магнитного полей в отсутствие первичных зарядов и токов:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{E} &= 0, \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1}$$

Монохроматическое излучение: $\vec{E} = \vec{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $\vec{H} = \vec{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$

Уравнения Максвелла в монохроматическом случае:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\mu\mu_0\omega\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{H} = -i\varepsilon\varepsilon_0\omega\vec{E}\tag{2}$$

Выразив из (2) последовательно векторы \vec{E} и \vec{H} получим разрешённую систему относительно неизвестных:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{i}{\mu\mu_0\omega}\text{rot}\vec{E} \\ \vec{E} &= \frac{i}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\text{rot}\vec{H}\end{aligned}\quad (3)$$

Подставив одну компоненту системы (3) в другую получим следующее представление данной системы относительно одной векторной компоненты:

$$\vec{E} = \frac{1}{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2}\text{rotrot}\vec{E} = \frac{1}{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2}(\text{grad div}\vec{E} - \Delta\vec{E}).\quad (4)$$

И получили систему уравнений относительно полного электрического поля (уравнение Гельмгольца):

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \\ \text{div}\vec{E} = 0 \end{cases}\quad (5)$$

Частное решение поля векторного уравнения Гельмгольца:

$$A(x) = \int_{\Sigma} F(x-y)j(y)dy, \quad F(x-y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = |x-y|,$$

где j - поле, заданное на Σ . $A(x)$ - решение уравнения

$$\Delta A + k^2 A = 0, \quad x \notin \Sigma, \quad (6)$$

но $\operatorname{div} A \neq 0, \operatorname{div} F(r) \neq 0$.

Ищем решение уравнения в виде:

- 1 $E(x) = \operatorname{rot} A(x)$
- 2 $E(x) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} A(x)$

Постановка задачи

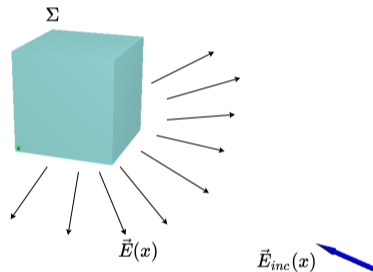
Ставится задача нахождения полного электрического поля вида:

$$\vec{E}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \vec{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \vec{E}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

где $\vec{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ - заданное первичное электрическое поле, $\vec{E}(\mathbf{x})$ - неизвестное поле рассеяния. На поверхности Σ ставится граничное условие:

$$\vec{n}(\mathbf{x}) \times \vec{E}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = 0. \quad (8)$$

а также условие излучения Зоммерфельда на бесконечности для уходящей волны.



Рассеяние волны в пространстве
на объекте

Интегральное уравнение

Граничное условие: $\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}}$

① $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Граничное условие для данного интегрального уравнения:

$$\vec{\mathbf{n}} \times \left[\int_{\Sigma} \text{grad } F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] + \frac{1}{2} \mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\vec{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma.$$

Интеграл в данной формуле является сингулярным, однако векторное умножение на нормаль делает особенность интегрируемого порядка.

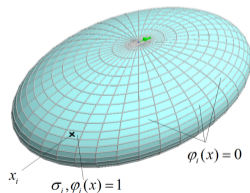
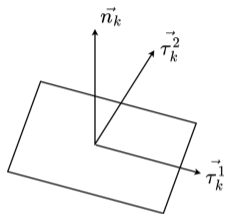
② $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{x})$

Граничное условие для данного интегрального уравнения:

$$\vec{\mathbf{n}} \times \left[\text{grad div} \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + k^2 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] = -\vec{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma$$

В данном случае интегральное уравнение является гиперсингулярным.

Метод кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокации



$$\alpha(x)\varphi(x) + \int_D K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in D \quad (9)$$

Приближенное решение:

$$\alpha(x_i)\varphi_i + \sum_{j=1}^n K_{i,j}\varphi_j = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad K_{ij} = \int_{\sigma_j} K(x_i, y)dy$$

Фундаментальное решение задачи рассеяния:

$$E(x) = \text{rot} \int_{\Sigma} j(y)F(x-y)dy, \quad F(x-y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = |x-y|$$

Вывод системы линейных уравнений

При применении граничного условия:

$$n(\mathbf{x}_k) \times \left[\frac{1}{2} \mathbf{j}_k \times n(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1} \int_{\sigma_i} \mathbf{j}_i \times \text{grad} F(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] = n_k \times E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_k), \quad (10)$$

где

$$\mathbf{j}_k = \mathbf{j}_k^1 \tau_k^1 + \mathbf{j}_k^2 \tau_k^2.$$

Скалярно домножим уравнение (10) на τ_k^1 и τ_k^2 :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{j}_k^1 \tau_k^1 - \sum_i \mathbf{j}_i^1(\tau_k^2, \tau_i^1, I_{ik}) - \sum_i \mathbf{j}_i^2(\tau_k^2, \tau_i^2, I_{ik}) = -\tau_k^2 E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_k) \\ \frac{1}{2} \mathbf{j}_k^2 \tau_k^2 + \sum_i \mathbf{j}_i^1(\tau_k^1, \tau_i^1, I_{ik}) + \sum_i \mathbf{j}_i^2(\tau_k^1, \tau_i^1, I_{ik}) = \tau_k^1 E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_k) \end{cases}, \quad (11)$$

где $I_{ik} = \int_{\sigma_i} (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}) \frac{e^{ikr}}{r^3} (ikr - 1) d\mathbf{y}$.

$$\begin{pmatrix} -(\tau_k^2, \tau_i^1, I_{ik}) & -(\tau_k^2, \tau_i^2, I_{ik}) \\ (\tau_k^1, \tau_i^1, I_{ik}) & (\tau_k^1, \tau_i^2, I_{ik}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_i^1 \\ j_i^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathbb{I} \begin{pmatrix} j_i^1 \\ j_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_k^2 E_{inc} \\ \tau_k^1 E_{inc} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Формула ЭПР Ψ :

$$\text{RCS} = \frac{1}{4\pi} \left| \sum_j i k e^{-ik(v, x_i)} [\mathbf{v} \times \mathbf{j}_i] \sigma_i \right|^2$$
$$\Psi = 10 \log \left(\frac{\text{RCS}}{\pi} \right)$$

ЭПР при $k=4.1$

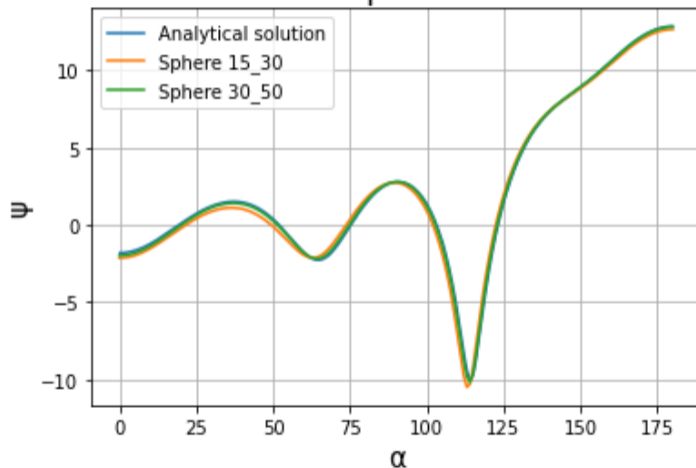


Таблица соотношения длины ячейки l и длины волны λ :

Сферы	l	λ / l
Сфера 15_30	0.42	3.7
Сфера 30_50	0.21	7.7

Полученный результат

ЭПР при $k=9.997$

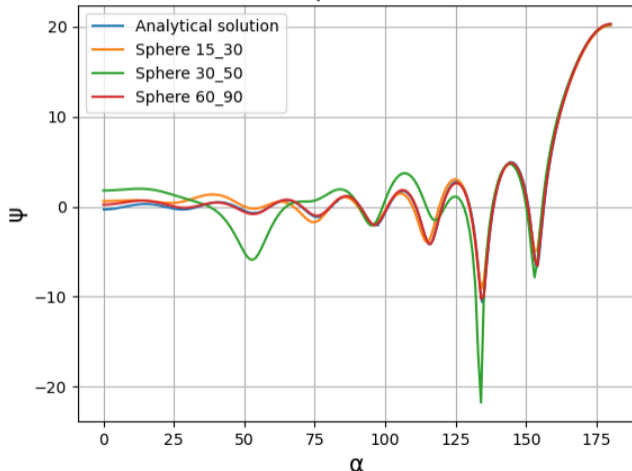


Таблица соотношения длины ячейки l и длины волны λ :

Сферы	l	λ / l
Сфера 15_30	0.42	1.5
Сфера 30_50	0.21	3.0
Сфера 60_90	0.1	6.3

Метод коллокаций для оператора $\text{rotrot}A$

Рассмотрим другое фундаментальное решение задачи рассеяния на идеально проводящем теле. Будем искать внешнее стационарное поле в виде следующего интегрального представления

$$\vec{E}(x) = \text{rotrot} \int_{\Sigma} \vec{j}(y)F(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma.$$

$$E(x) = \text{grad div} \int_{\Sigma} \vec{j}(y)F(x-y)dy + k^2 \int_{\Sigma} \vec{j}(y)F(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma..$$

Потребуем выполнение граничного условия

$$n \times \left(\text{grad div} \int_{\Sigma} \vec{j}(y)F(x-y)dy + k^2 \int_{\Sigma} \vec{j}(y)F(x-y)dy \right) = \vec{f}(x), \quad x \in \Sigma,$$

где $\vec{f}(x) = -\vec{n}(x) \times E_{\text{inc}}(x)$

Отличие от интеграла с одним ротором

Отличие от интеграла с одним ротором заключается в появлении дополнительного слагаемого в виде контурного интеграла:

$$\sum_{j=1}^N \vec{n} \times \left[\text{grad div} \int_{\Sigma_j} \vec{j}(y) F(x_i - y) dy + k^2 \int_{\Sigma_j} \vec{j}(y) F(x_i - y) dy \right] = \vec{f}(x_i), i = 1, \dots, N.$$

Для получения СЛАУ нужно воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского

$$\text{grad div} \int_{\sigma_k} \vec{j}_k F(x_k - y) dy = \int_{\partial \sigma_k} (\vec{j}_k, \vec{\nu}) \text{grad}_x F(x_k - y) dy$$

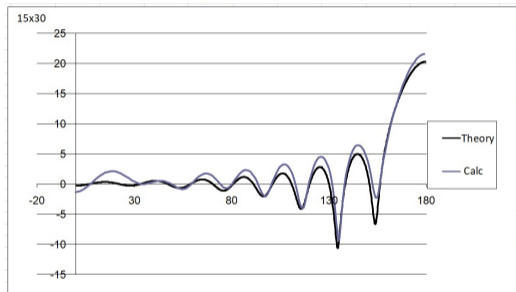
$$\sum_{\substack{m,k=1,2 \\ j=1,\dots,N}} a_{ij}^{km} j_j^m = f_i^k, \text{ где } a_{ij}^{km} = b_{ij}^{km} + c_{ij}^{km}, \quad b_{ij}^{km} = \left[\int_{\sigma_j} F(x_i - y) dy \right] k^2 (\vec{e}_i^k, \vec{e}_j^m) \quad f_i^k = -\vec{E}_{inc}(x_i) \vec{e}_i^k$$

$$c_{ij}^{km} = \left[- \sum_{l=1}^4 \int_{a_l}^{b_l} \vec{V}(x - y) \left(\vec{e}_j^m, \frac{[b_l - a_l] \times \vec{n}}{|b_l - a_l|} \right) ds_y \right] \vec{e}_i^k \quad F(x - y) = \frac{1}{4\pi |x - y|}$$

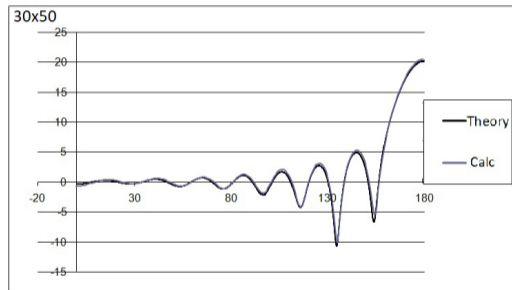
$$\vec{V}(x - y) = \text{grad}_x F(x - y) = \frac{(ik |x - y| - 1)}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x - y|^3} (\vec{x} - \vec{y}).$$

Формула для ЭПР в случае электрических токов имеет другой вид и вычисляется по формуле:

$$\sigma(\tau) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|E(R, \tau)|^2}{|E_{\text{ex}}|^2} = 4 \frac{\pi}{|E_0|^2} \left| \sum_{\sigma_j} e^{ik(\tau, x_j)} \frac{k^2}{4\pi} S_{\sigma_j}(\mathbf{j}_j - \tau(\mathbf{j}_j, \tau)) \right|^2 \quad (13)$$
$$\sigma_{\text{дб}} = 10 \lg \sigma$$



Результаты для $k = 10$, сетка 15×30



Результаты для $k = 10$, сетка 30×50

Введём скалярное произведение

$$(f, g) = \int_D f(x) \bar{g}(x) dx$$

и спроецируем функции φ на некое пространство L , заданное базисными функциями $L = \text{span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

В случае метода Бубнова - Галёркина функцию φ мы будем также искать в пространстве L . Тогда, если приближенное решение $\tilde{\varphi} = \sum_{i=0}^n \varphi_i e_i$, то решение интегрального уравнения эквивалентно СЛАУ

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} \varphi_j + \sum_{j=0}^n K_{ij} \varphi_j = f(x_i), i = 1, \dots, n,$$

$$a_{ij} = (ae_j, e_i), K_{ij} = (Ke_j, e_i)$$

Метод Галёркина: выбор базисных функций

Для решения интегрального уравнения был использован метод Галёркина с базисными функциями RWG:

Каждая базисная функция $e_i(y)$, $i \in 1, \dots, n$, привязана к ребру, которое является общим для некоторых двух ячеек. Для каждого треугольника ABC вводится базисный ток со стороны AB по формуле

$$\vec{g}(x) = \vec{g}[A,B,C](x) = \frac{C - x}{S_{abc}}$$

Тогда функция $\vec{e}_i(y)$, привязанная к ребру AB строится по формуле

$$\vec{e}_i(y) = \begin{cases} -\vec{g}[A,B,C^-](y), & y \in ABC^- \\ \vec{g}[A,B,C^+](y), & y \in ABC^+ \\ 0, & y \in \Sigma', y \notin AC^+BC^- \end{cases}$$

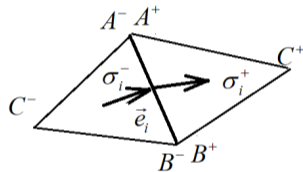


Иллюстрация к построению базисных функций

- 1 Базисный ток $e_i(x)$ удовлетворяет на боковых ребрах AC^+ , AC^- , BC^+ , BC^- условию

$$\vec{e}_i(x)\vec{v}(x) = 0$$

(поток на боковых ребрах отсутствует)

- 2 На центральном ребре выполнено условие

$$\vec{e}_i^-(x)\vec{v}^-(x) = \vec{e}_i^+(x)\vec{v}^+(x) = \frac{2}{|AB|}$$

где $v^+(x)$: орт вектора нормали к ребру AB в плоскости ABC^+ , $v^-(x)$ - в плоскости ABC^- соответственно. (Поток через общее ребро одинаков)

- 3 Поверхностная дивергенция базисной функции определяется формулой:

$$\text{Div}\vec{e}_i(x) = \frac{2}{S_{ABC^-}}, \quad x \in ABC^-, \quad \text{Div}\vec{e}_i(x) = \frac{-2}{S_{ABC^+}}, \quad x \in ABC^+$$

Преобразование оператора

Для решения интегрального уравнения оператор K представляется в виде интегро-дифференциального оператора

$$K(x) = \text{grad} \int_{\Sigma} \text{div}_x(\vec{j})(y)F(x-y)d\sigma_y + k^2 \int_{\Sigma} \vec{j}(y)F(x-y)d\sigma_y$$

и преобразование к виду

$$K(x) = \text{grad} \int_{\Sigma} F(x-y)\text{Div}\vec{j}(y)d\sigma_y + k^2 \int_{\Sigma} \vec{j}(y)F(x-y)d\sigma_y$$

Отсутствие токов по боковым ребрам у базисных функций позволяет в выражении K_{ij} проинтегрировать по частям, позволяя получить окончательное выражение для коэффициентов матрицы

$$K_{ij} = k^2 \int_{\sigma_i} \left(\int_{\sigma_j} F(x-y)\vec{e}_j(y)dy \right) \vec{e}_i(x)dx - \int_{\sigma_i} \left(\int_{\sigma_j} F(x-y)\text{Div}\vec{e}_j(y)dy \right) \text{Div}\vec{e}_i(x)dx,$$

которые являются интегралами со слабой особенностью

- ❶ Для улучшения точности подсчёта интеграла со слабой особенностью фундаментальное решение $F(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$ представляется как

$$F = \frac{1}{r} + \frac{e^{ikr} - 1}{r},$$

$\frac{e^{ikr} - 1}{r}$ ограничена

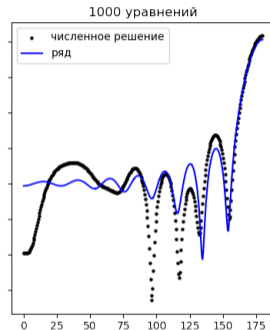
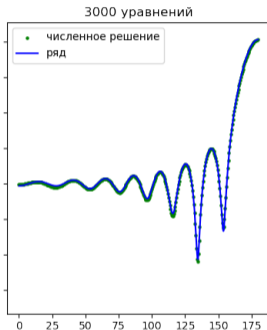
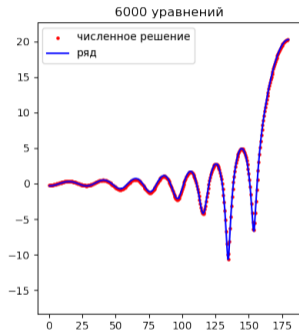
$$\int_{\Delta} \frac{ds}{r} \text{ считается аналитически} \tag{14}$$

- ❷ Для подсчёта интегралов использовались квадратуры Гаусса с 4 точками.

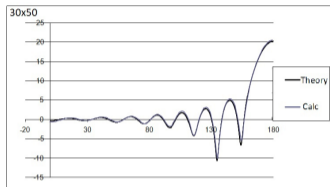
Ниже приводится пример расчёта рассеяния плоской волны на сфере для сеток различного размера. Приведена зависимость от угла θ эффективной поверхности рассеяния в децибелах (формула 13)

Результаты вычислений

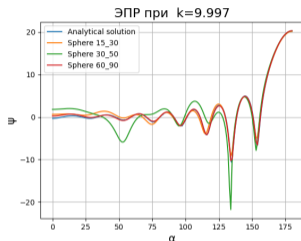
Диаграмма рассеяния сферы, $k = 10$



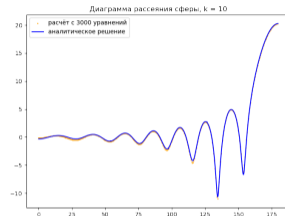
Количество уравнений	λ/d
1000	2.083
3000	4.120
6000	4.513



а) Метод коллокации для электрических токов



б) Метод коллокации для магнитных токов



в) Метод Галеркина для электрических токов

Как видно из графиков решений различных методов для 3000 уравнений, все методы сходятся к аналитическому решению, причём метод Галёркина для электрических токов показал наилучший результат, после идёт метод коллокация для электрических токов, а метод коллокаций для магнитных токов наименее точен.

Спасибо за внимание!

**Me peeling
potatoes**

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x$$

**My mum peeling
potatoes**

$$\int f(x) dx$$