
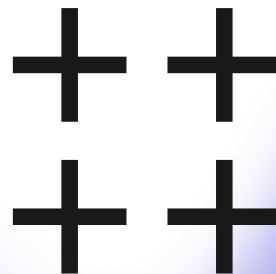


# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ СЕРДЦА



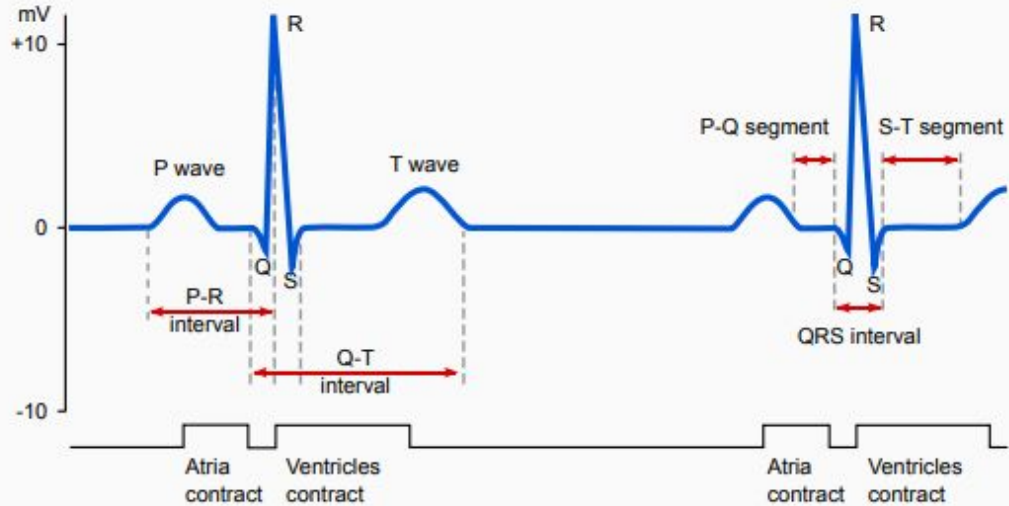
Сириус.

Математическое моделирование в  
биомеханике и медицине. 15-20 мая 2023 г



# ВВЕДЕНИЕ

Электрокардиография (ЭКГ) — методика регистрации и исследования электрических полей, образующихся при работе сердца.



- P-волна – деполяризация предсердий
- QRS-комплекс – деполяризация желудочков
- T-волна – реполяризация желудочков
- Реполяризация предсердий неразличима в QRS-комплексе

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Монодоменное уравнение:

$$\nabla \cdot (\sigma_i \nabla V_m) = (\kappa + 1) \beta \left( C_m \frac{dV_m}{dt} + I_{\text{mem}} \right) - I_s$$

$\sigma_i$  – тензор внутриклеточной проводимости

$\sigma_e$  – тензор внеклеточной проводимости

$\beta$  – отношение поверхности мембраны к объёму клетки

$C_m$  – ёмкость мембраны

$I_*$  – внешние и внутренние токи

$V_m$  – трансмембранное напряжение

# ПОЛНАЯ МОДЕЛЬ ЭКГ

$\Omega_0$  – тело вокруг сердца

$\Gamma_{\text{ext}}$  – внешняя граница

$\Gamma_H$  – интерфейс между  $\Omega$  и  $\Omega_0$

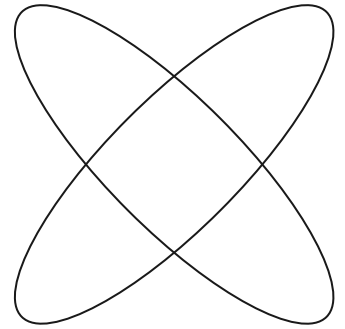
$$\begin{aligned} -\nabla \cdot ((\sigma_i + \sigma_e) \nabla \phi_0) &= \nabla \cdot (\sigma_i \nabla v) && \text{в } \Omega \\ -\nabla \cdot (\sigma_0 \nabla \phi_0) &= 0 && \text{в } \Omega_0 \\ \mathbf{n} \cdot \sigma_0 \nabla \phi_0 &= 0 && \text{на } \Gamma_{\text{ext}} \\ &+ \text{непрерывность } \phi_0 && \text{на } \Gamma_H \end{aligned}$$

$v$  – решение задачи Monodomain / Bidomain

$\phi_0$  – электрический потенциал

$\sigma_0$  – тензор проводимости (неоднородный)

Отведение  $E_1 = \phi_0(L) - \phi_0(R)$



# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решить поставленную задачу двумя способами и добиться наиболее быстрого результата

# РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

$$-\nabla \cdot ((\sigma_i + \sigma_e) \nabla \phi_0) = \nabla \cdot (\sigma_i \nabla v)$$

Конечно элементная дискретизация

A - левая часть уравнения прямой задачи ЭКГ  
b - правая часть уравнения прямой задачи ЭКГ  
x - решение уравнения

$$Ax=b, \text{ где}$$

Решение предполагает нахождение вектора x в каждый момент времени

# ДИСКРЕТНЫЙ СПОСОБ

$$A'd_{v_i} = e_{v_i},$$
$$A'd_{v_e} = e_{v_e}, \text{ где}$$

$$A' = A[i, l] + \delta(i, l)$$

$\delta$  - символ Кронекера

$$e_{v_i} = [0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0]$$

$e_{v_e}$  - аналогично относительно  $v_e$ .

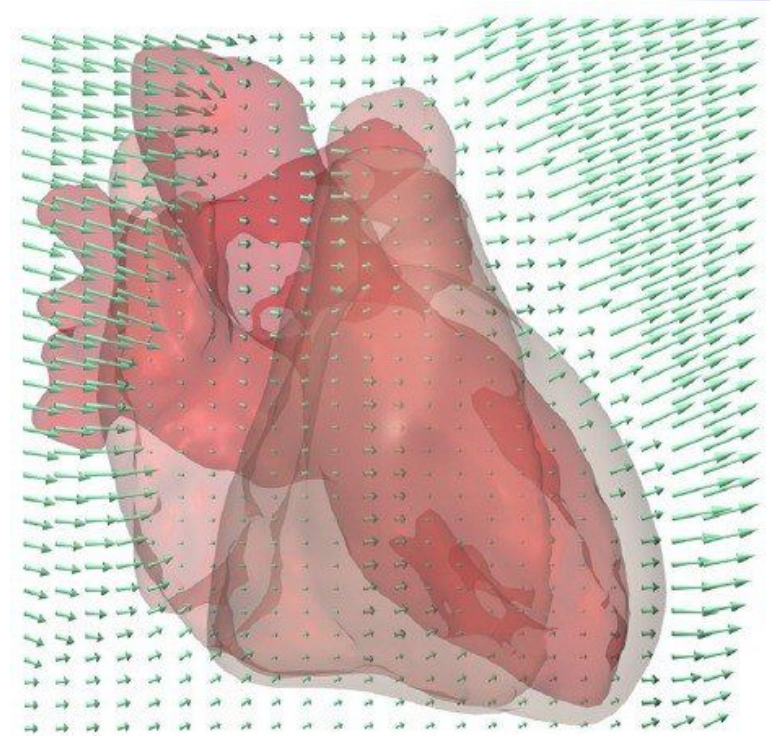
$$X[v_i] * d[v_i] = b[v_i]$$

# LEAD-FIELD METHOD

$$V(t) = \int \nabla Z(\vec{x}) \cdot G_i \nabla V_m d\vec{x}$$

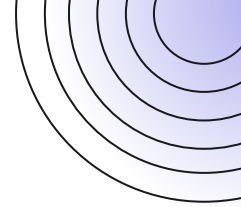
$$\nabla \cdot ((G_i + G_e) \nabla Z(\vec{x})) = \sum_i c_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Potse M. Scalable and accurate ECG simulation for reaction-diffusion models of the human heart //Frontiers in physiology. – 2018. – T. 9. – C. 370.





# ЭТАПЫ РАБОТЫ



**\_01**

**РЕШЕНИЕ 2D-ЗАДАЧИ**

Оба способа

**\_02**

**РЕШЕНИЕ 2D-ЗАДАЧИ**

Добавление направления волокон

**\_03**

**РЕШЕНИЕ 3D-ЗАДАЧИ**

Оба способа

**\_04**

**РЕШЕНИЕ 3D-ЗАДАЧИ**

На идеализированной модели желудочков сердца





**\_01**

**РЕШЕНИЕ 2D-  
ЗАДАЧИ**

---

# ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

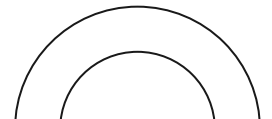


Сердце представляется как прямоугольник, где белая часть - желудочки, черная - внешние органы и ткани

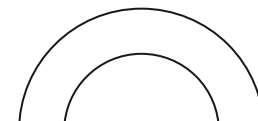
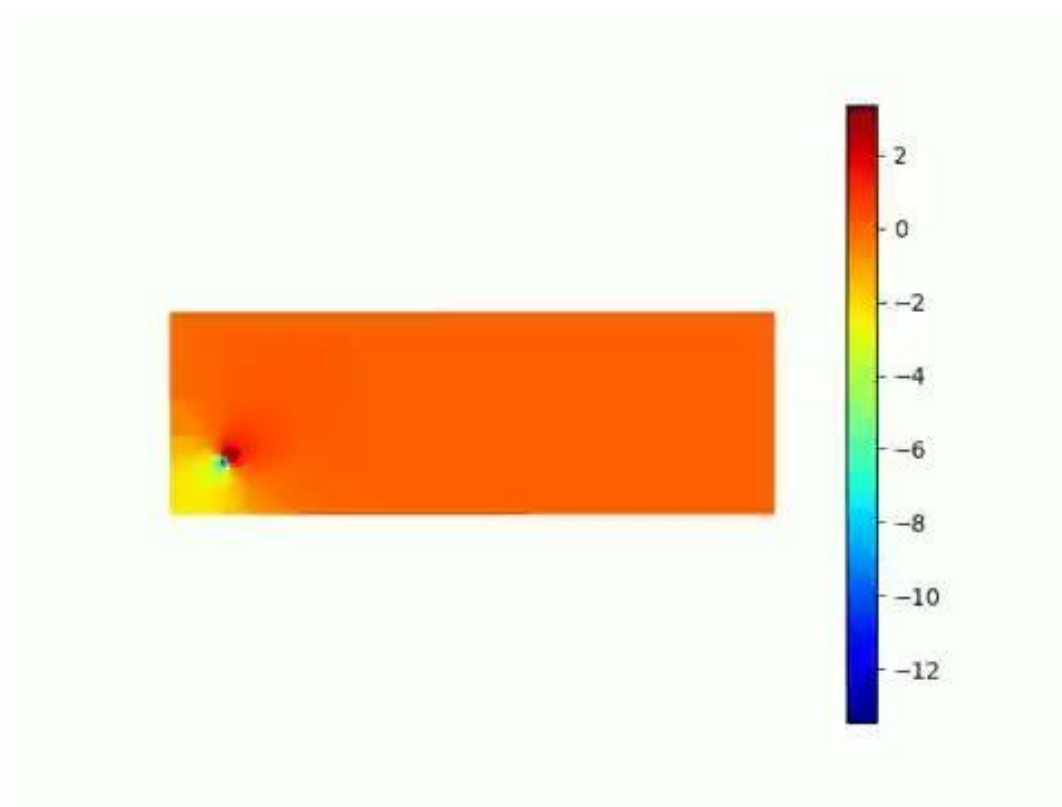
- Даны расчетная сетка для 2D-модели, а также показания трансмембранного напряжения для каждого момента времени (всего 600).
- Считается, что у волокон нет направления, то есть  $\sigma_i$  и  $\sigma_e$  - скаляры.
- Электроды располагаются слева и справа



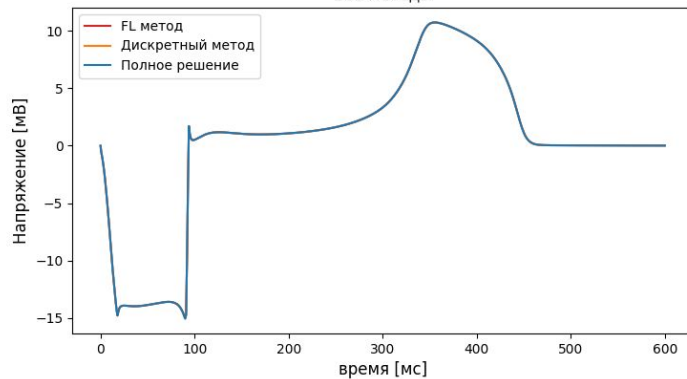
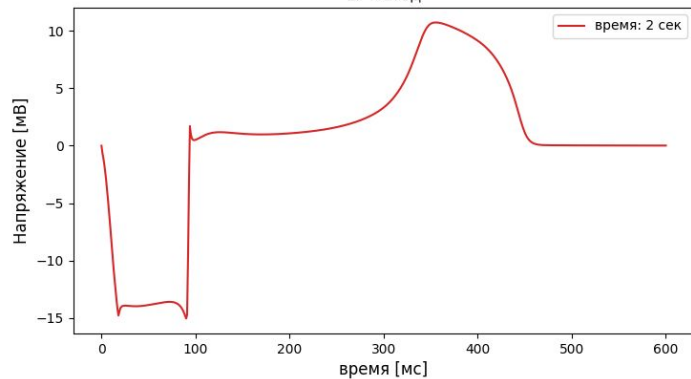
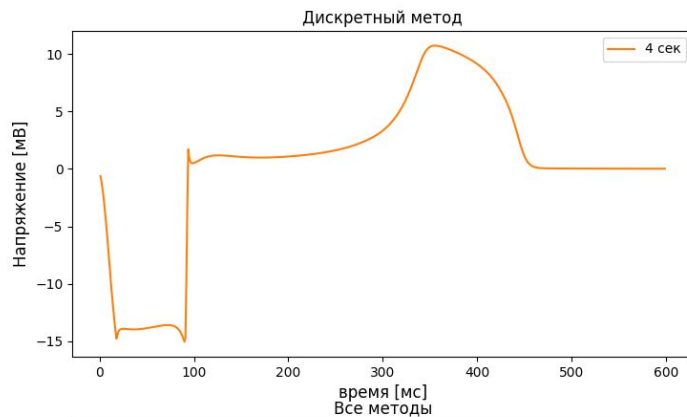
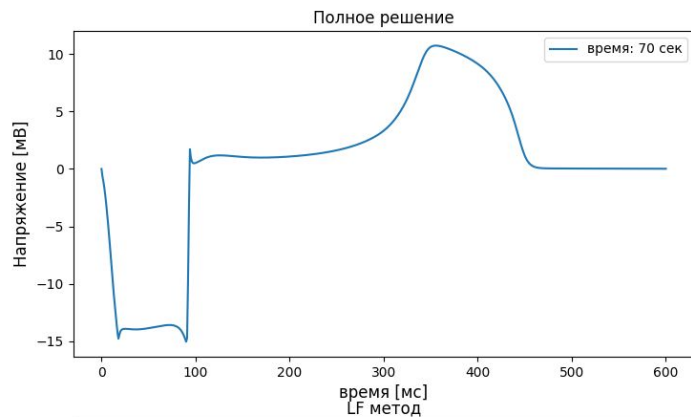
Количество узлов сетки - 19521



# ВИЗУАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ



# СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ





**\_02**

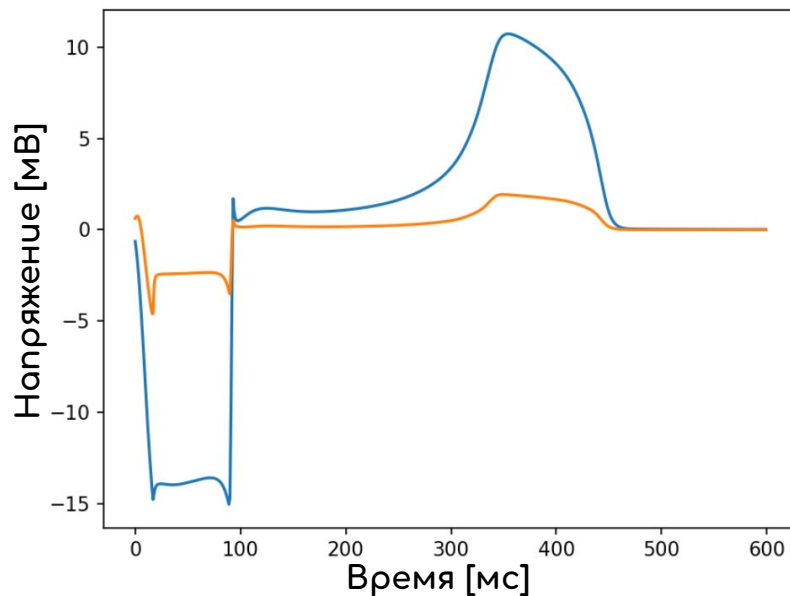
**РЕШЕНИЕ 2D-  
ЗАДАЧИ**

Добавление направления волокон

---

# СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

На следующем этапе матричный метод был модернизирован путем добавления направления волокон. Математический смысл - задание  $\sigma_i$  и  $\sigma_e$  не скаляром, а матрицей



Полученный график



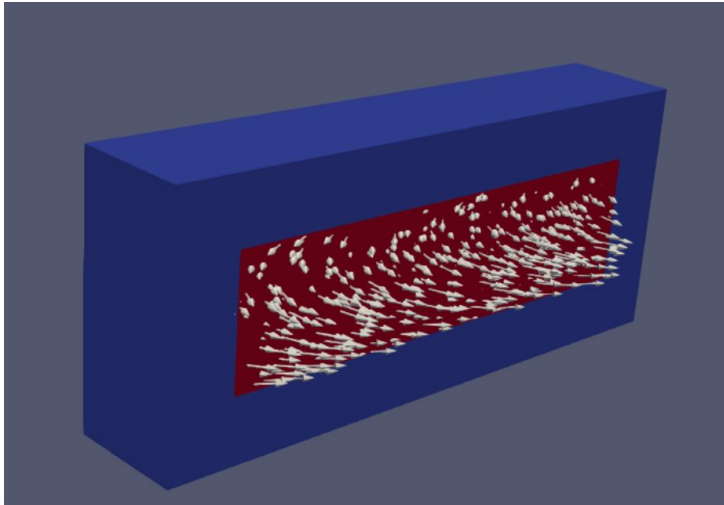
**\_03**



**РЕШЕНИЕ 3D-  
ЗАДАЧИ**



# ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ

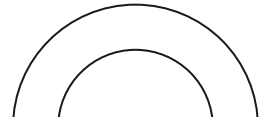


Сердце представляется как параллелепипед, где красная часть - желудочки, черная - внешние органы и ткани; белые стрелки - направление волокон ткани

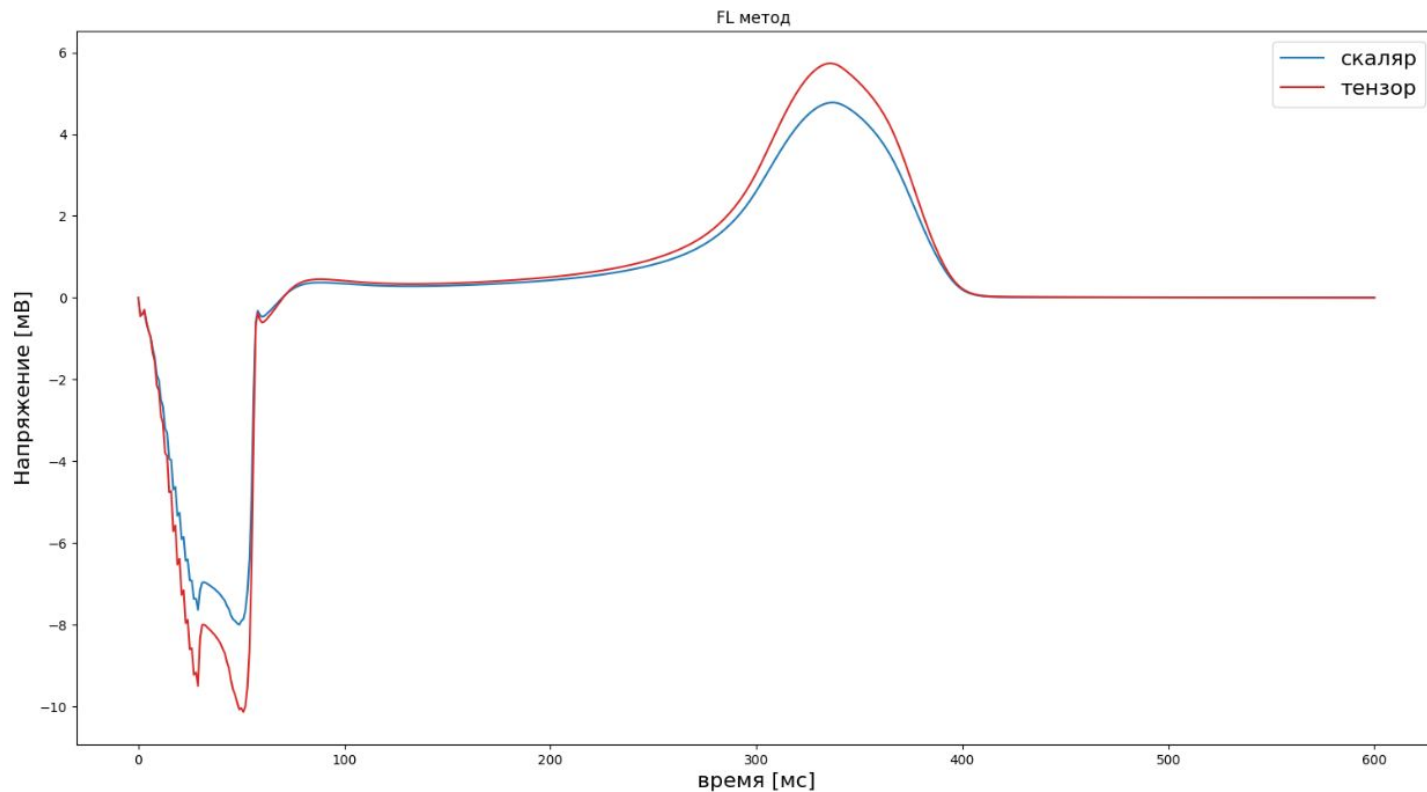
- Даны расчетная сетка для 3D-модели, а также показания трансмембранного напряжения для каждого момента времени (всего 600).



Количество узлов сетки - 83852,  
количество тетраэдров - 389138



# ГРАФИК РЕШЕНИЯ 3D-ЗАДАЧИ

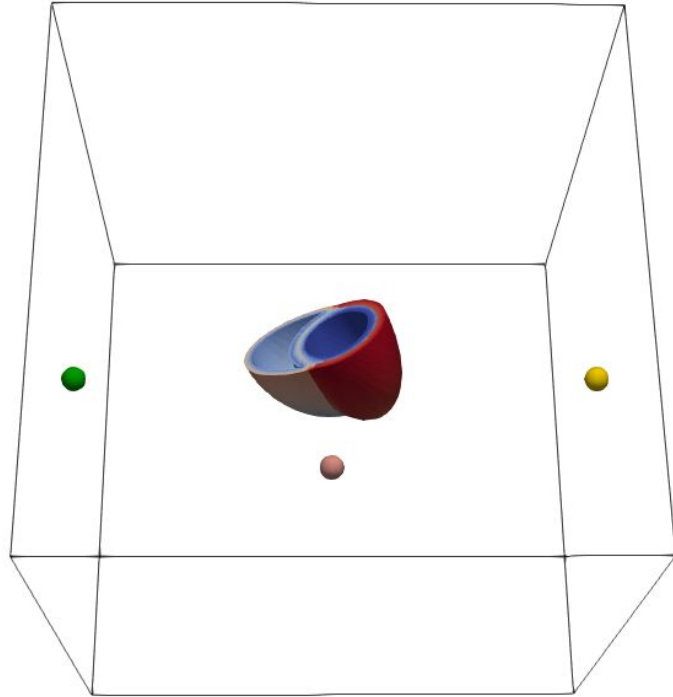




# РЕШЕНИЕ 3D- ЗАДАЧИ

На идеализированной  
модели желудочков  
сердца

# ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ



Сердце представляется в виде идеализированной модели

Метод сопряженных градиентов +  
python multiprocessing

- Даны расчетная сетка для 3D-модели, а также показания трансмембранного напряжения для каждого момента времени (всего 600).

Количество узлов сетки - 102820;  
количество тетраэдров - 644973



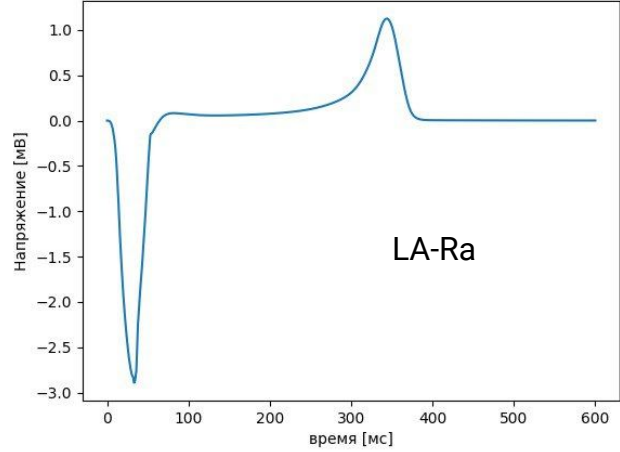
# ОТВЕДЕНИЯ ЭЙНТХОВЕНА

- Эйнтховен – отведения I, II, III
- Уилсон и Джонстон (1935) – V1-V6
- Гольдбергер (1942) – усиленные отведения aVR, aVL, aVF
- 12 канальная ЭКГ (1943)

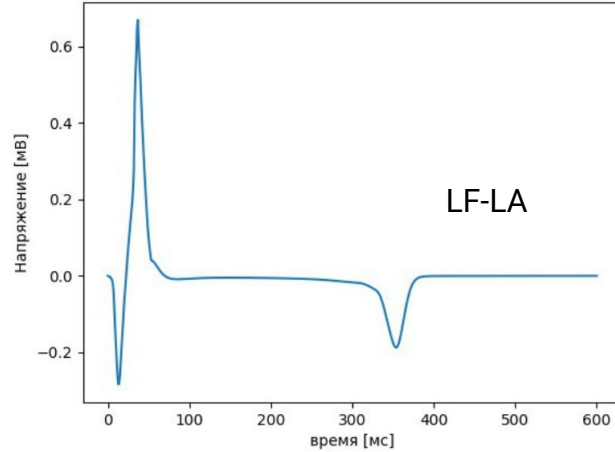


# ГРАФИК РЕШЕНИЯ

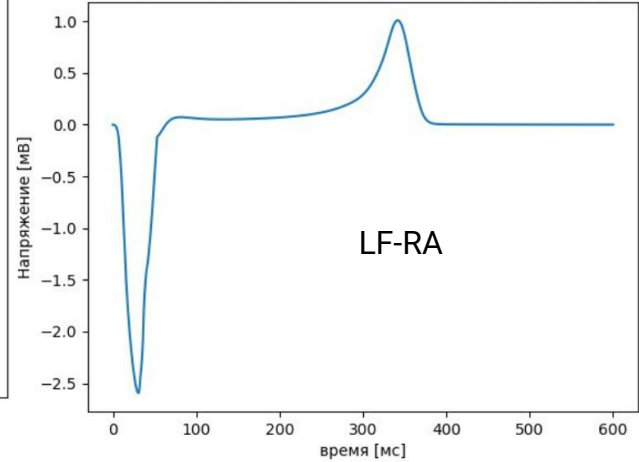
LF метод на иделизированной модели желудочков



LF метод на иделизированной модели желудочков



LF метод на иделизированной модели желудочков



# РЕЗУЛЬТАТЫ

	Полная задача	LF	Дискретный
2D	70 сек	2 сек	4 сек
3D	*660 сек	11 сек	15 сек
3D + волокна	*1300 секунд	22 сек	30 сек
Идеальные желудочки	*24000 секунд	40 сек	46 сек
Идеальные желудочки(parallel)	*15000 секунд	25 сек	33 сек

\*Примерная оценка



# КОМАНДА ПРОЕКТА

Багаутдинова Эльмира (Саратовский государственный университет): дискретный метод, его оптимизация

Беляева Александра (Московский государственный университет): дискретный метод, его оптимизация

Глебова Софья (Южный федеральный университет): изучение статей по теме, прямолинейный метод

Диц Даниил (НТУ Сириус): LF-метод, его оптимизация, добавление волокон на 3D задачу

Крошила Анна (Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина): добавление направления волокон, презентация

Модестов Кирилл (РХТУ им. Д.И. Менделеева): изучение статей по теме

Рамазанов Али (НТУ Сириус): LF-метод, его оптимизация

Смакотина Алина (Томский государственный университет): презентация, дискретный метод

Ющак Мария (Омский государственный технический университет): изучение статей по теме, прямолинейный метод

Дроздов Андрей (НТУ Сириус) - параллельная реализация