



Университет
Сириус



Исследование методов глобально-регионального моделирования динамики атмосферы

Докладчик: Третьяк Илья Дмитриевич

Участники проекта: Демянчук Н.В., Колесников П.В., Костин Л.А., Пасконова Л.В., Третьяк И.Д., Шпак П.М., Юлдашев К.Р.

Руководители проекта: Шашкин В.В., Гойман Г.С., Алипова К.А.



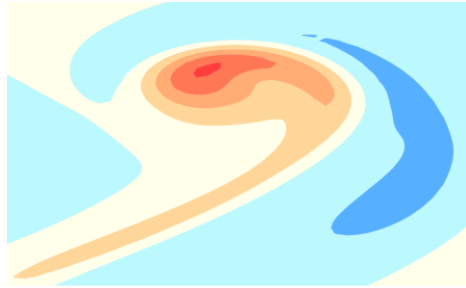
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

МИИГАиК
Московский государственный университет
геодезии и картографии

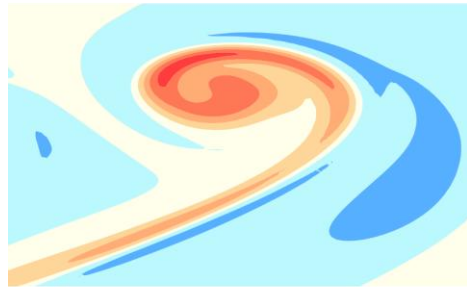


Актуальность

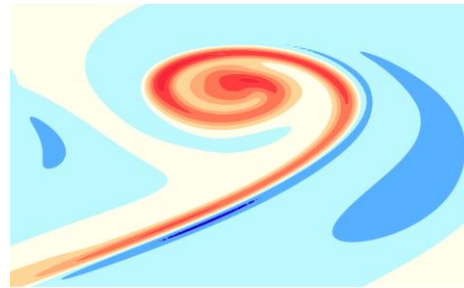
Повышение разрешения сетки – один из основных способов улучшения прогноза



$\Delta x = 80 \text{ km}$

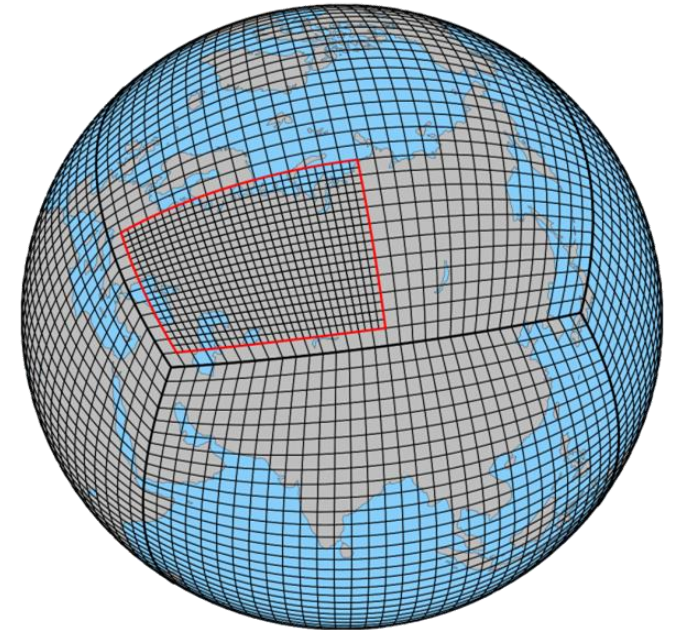


$\Delta x = 40 \text{ km}$



$\Delta x = 20 \text{ km}$

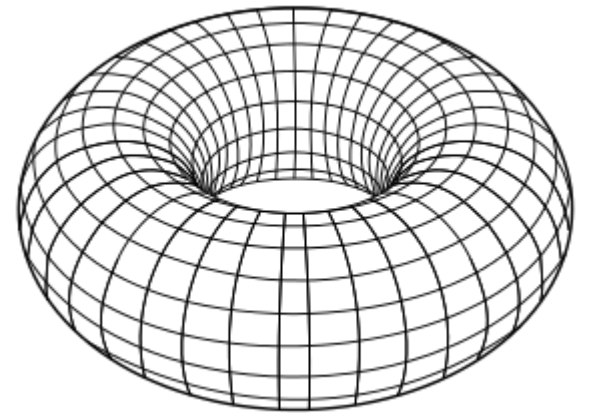
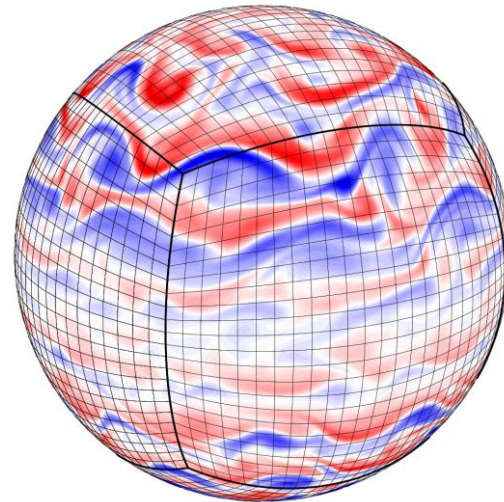
- **Глобальное повышение разрешения вычислительно затратно**
- **Одно из возможных решений – локальное сгущение сетки в области интереса**



Цель работы

Для упрощенной математической модели (модели мелкой воды) на вращающемся торе реализовать и исследовать методы сгущения сеток

1. Реализовать модель мелкой воды на торе
2. Реализовать численные методы, позволяющие производить локальное сгущение сеток
3. Провести ряд модельных тестов для оценки полученных методов



Нелинейные уравнения мелкой воды

Адвективная форма:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial x} + fv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y} - fu, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} - \frac{\partial(hv)}{\partial y}, \end{cases}$$

Обозначения:

u, v – компоненты вектора скорости,

h – высота уровня жидкости,

$g = 9,8 \text{ м/сек}^2$ – ускорение свободного падения,

$f = 2 * 7,292 * 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$ – параметр Кориолиса

Векторно-инвариантная форма:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (\xi + f)v - \frac{\partial}{\partial x}(K + gh), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -(\xi + f)u + \frac{\partial}{\partial y}(K + gh), \\ \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} - \frac{\partial(hv)}{\partial y}, \end{cases}$$

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, K = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

$$E = h \frac{u^2 + v^2}{2} + g \frac{h^2}{2} = \text{const}$$

Энергия сохраняется

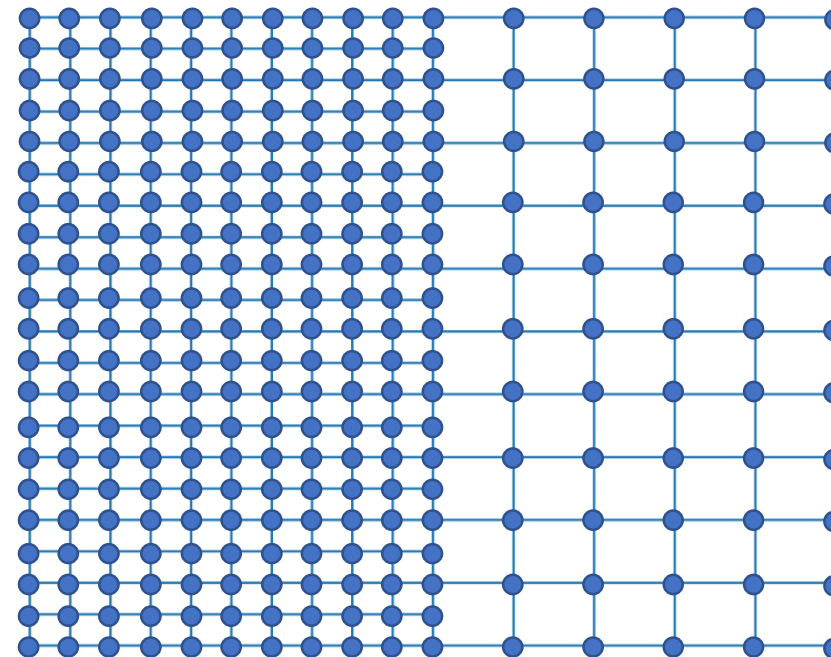
Численные методы

Метод интегрирования по времени:

- Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Методы дифференцирования по пространству:

- Центральная разность 2-го и 4-го порядка (по оси y)
- SBP-SAT порядка 2-1 и 4-2 (по оси x)



Начальные условия: 4 вида

Граничные условия: периодические

SBP-SAT

(Summation-By-Parts, Simultaneous Approximation Terms)

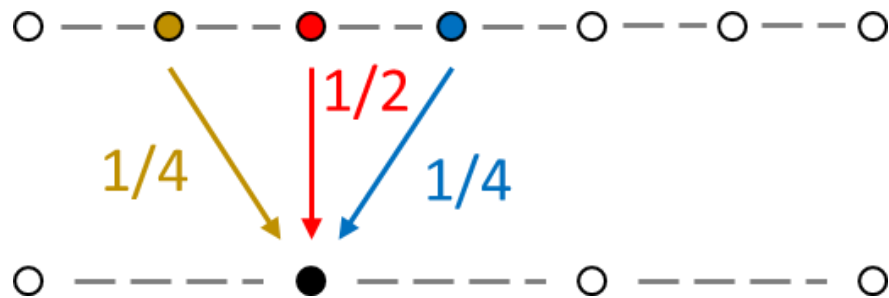
$$\int_a^b u(x) \frac{(\partial v(x))}{(\partial x)} dx = -u(a)v(a) + u(b)v(b) - \int_a^b v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx$$

$$\frac{du_h}{dt} = -Du_h + SAT_0 + SAT_N, \quad (u, Dv) = u^T (E_N - E_0)v - (Du, v)$$

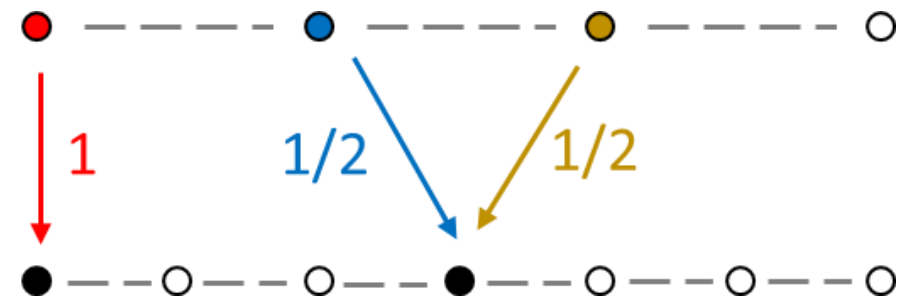
- D – SBP-оператор пространственного дифференцирования.
- SAT_0, SAT_N - члены, обеспечивающие условия сохранения энергии на границе сшивки и периодические граничные условия
- **SBP-21:** $f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{dx}$, $f'_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{dx}$, $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2dx}$

Интерполяция на интерфейсах

- Интерполяция 2-го порядка



Интерполяция с мелкой на
грубую сетку второго порядка



Интерполяция с грубой на
мелкую сетку второго порядка

- Интерполяция 4-го порядка
- Матрицы операторов интерполяции сопряжены

Численный фильтр

Для подавления мелкомасштабных ошибок использовался численный фильтр:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -K^2 \Delta^2 \Psi$$

Явный метод Эйлера:

$$\psi^f = \Psi - \Delta t \cdot K^2 \cdot \Delta^2 \Psi$$

ψ^f – отфильтрованное поле

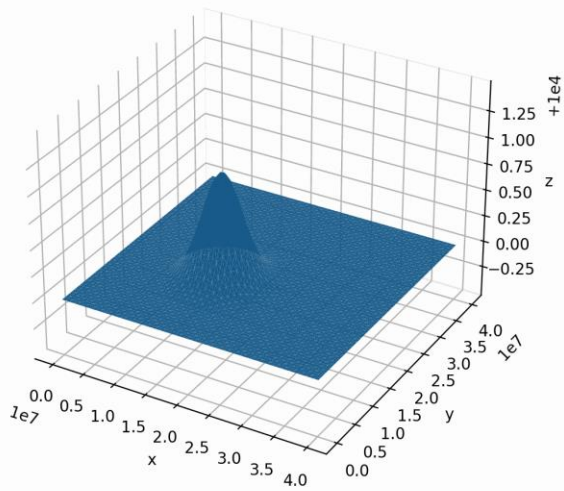
- Не выражает физику природных процессов
- Стандартный прием при численном моделировании динамики атмосферы

РЕЗУЛЬТАТЫ

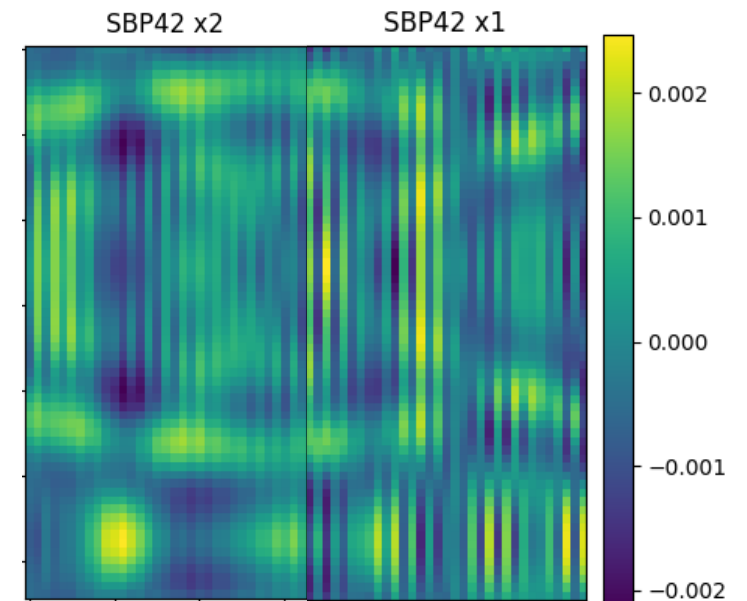
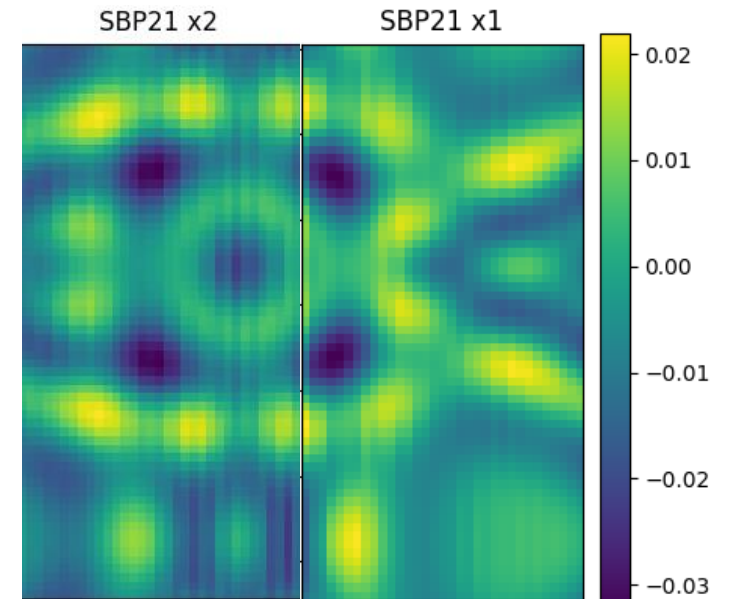
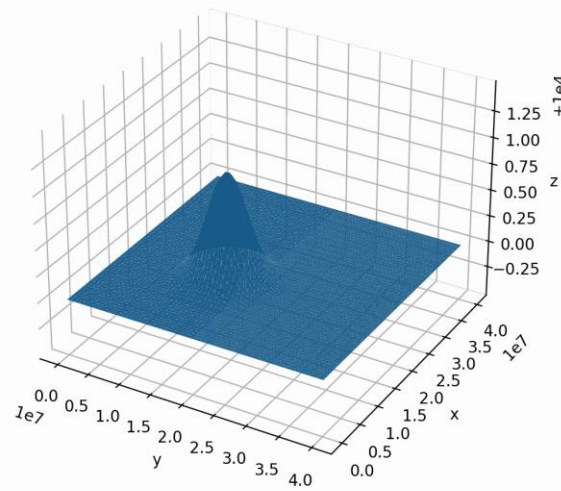
Тест №1: Разбегание Гауссовой горки

- Адвективная форма уравнений
- Начальные условия: кривая Гаусса

без сгущения



со сгущением



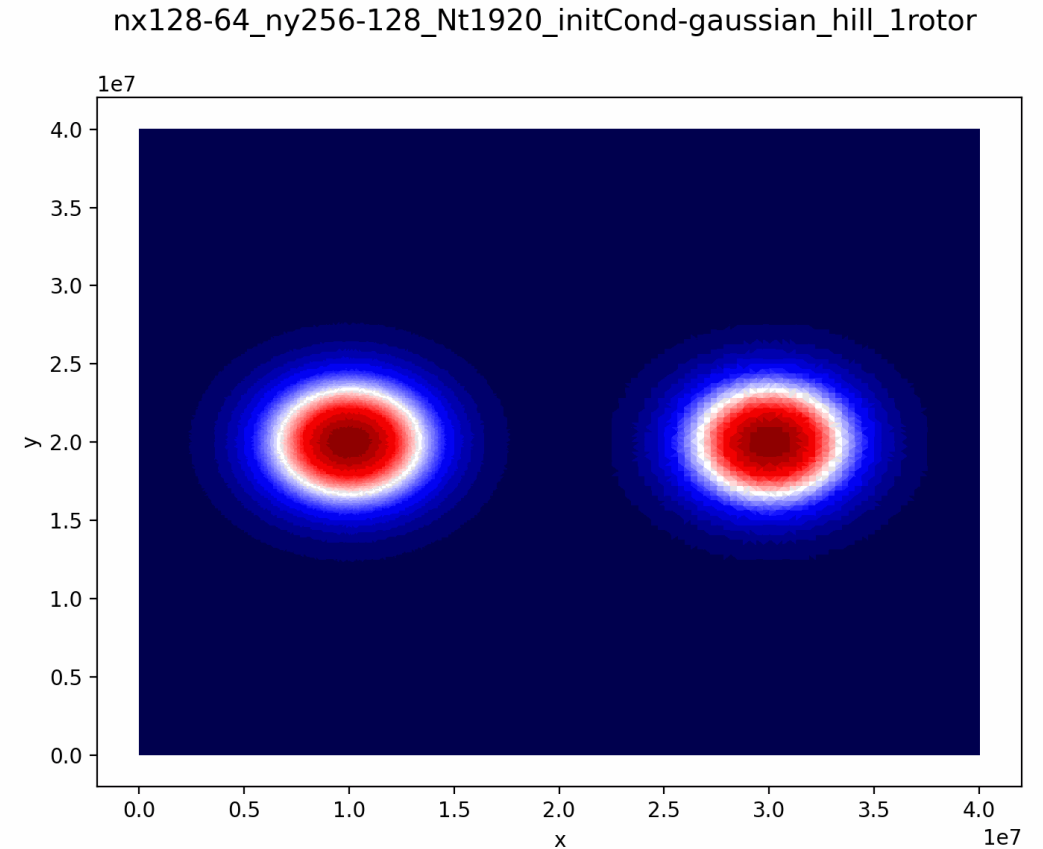
Ошибка при сгущении одного блока

Тест №2: Перенос

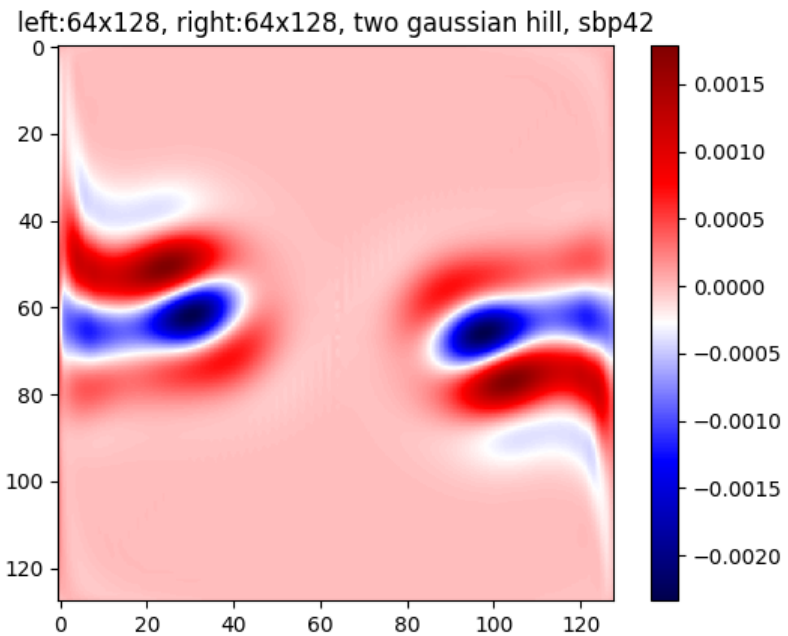
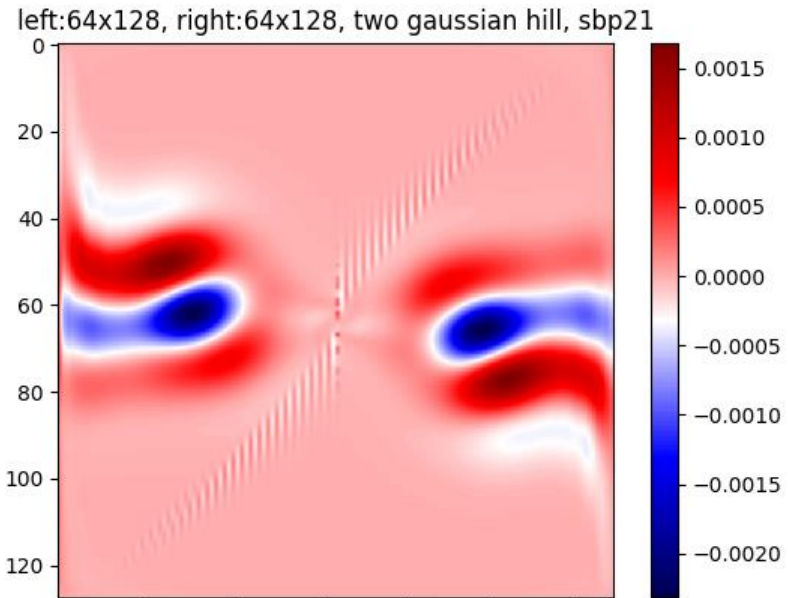
- Перенос пассивной примеси
- Начальные условия: две кривых Гаусса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} \end{cases}$$

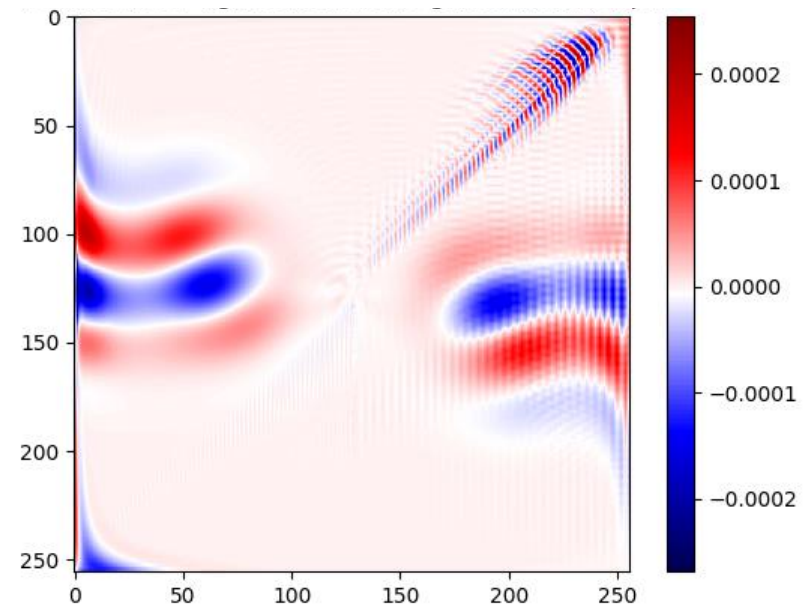
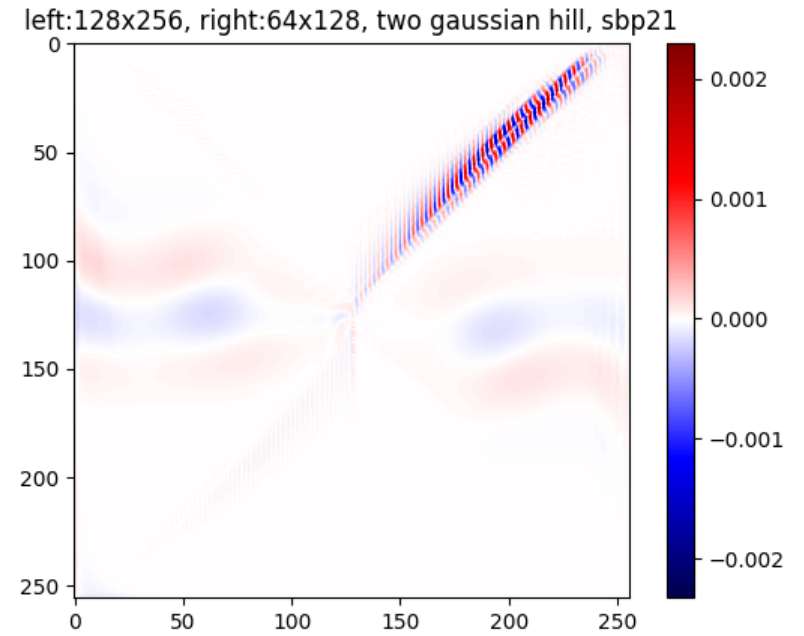
$$u(x, y) = \pm \sin(\pi x) \cos(\pi y)$$
$$v(x, y) = \mp \cos(\pi x) \sin(\pi y)$$



Ошибки при расчете на одинаковых блоках



Ошибки при расчете со сгущением блока



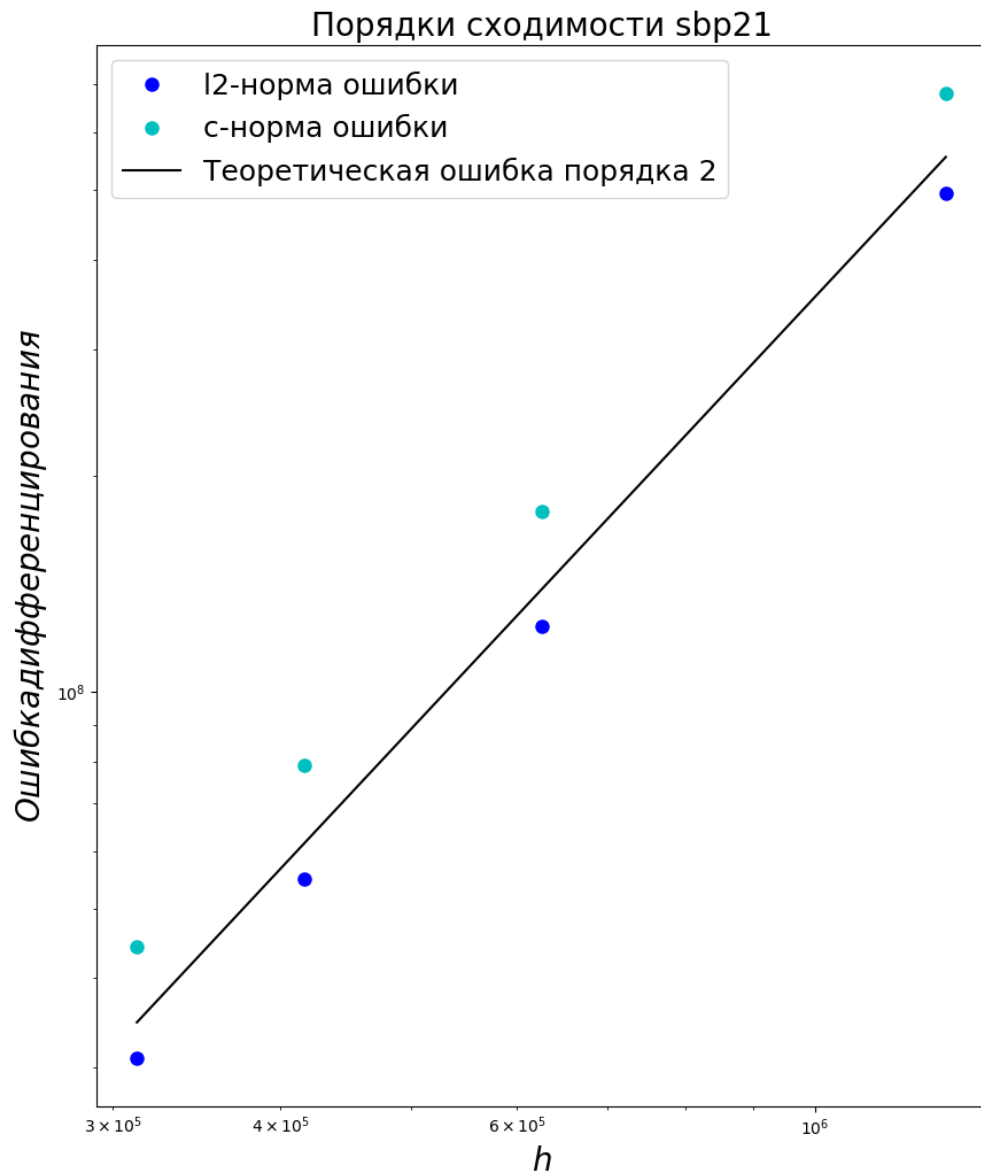
Тест №3: Геострофический баланс

- Векторно-инвариантная форма уравнений
- Начальные условия: геострофически сбалансированное течение
- Аналитическое решение – стационарные поля
- Валидация модели

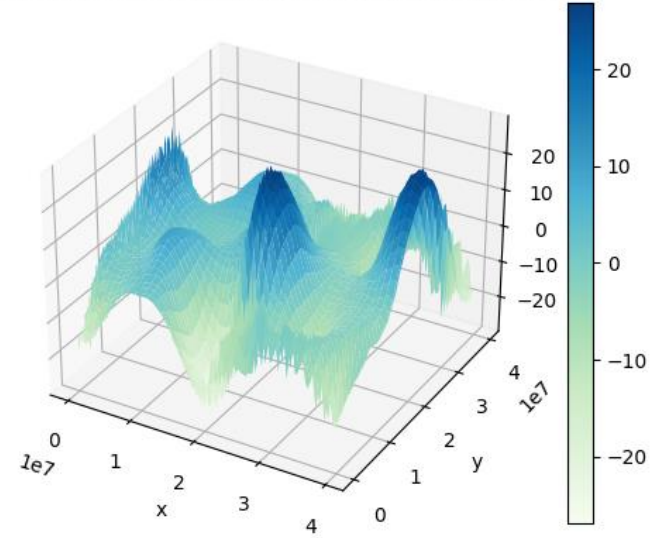
$$u(x, y) = A_x (\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y))$$

$$v(x, y) = A_y (-\cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y))$$

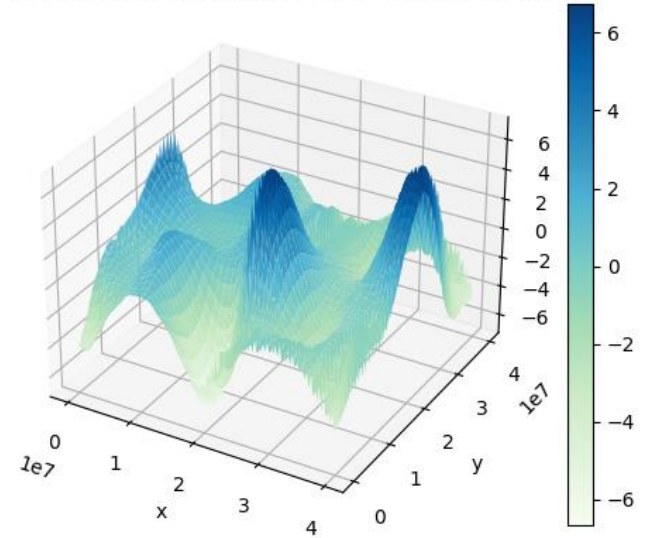
$h(x, y)$ - подбирается в соответствии с условием выполнения геострофического баланса

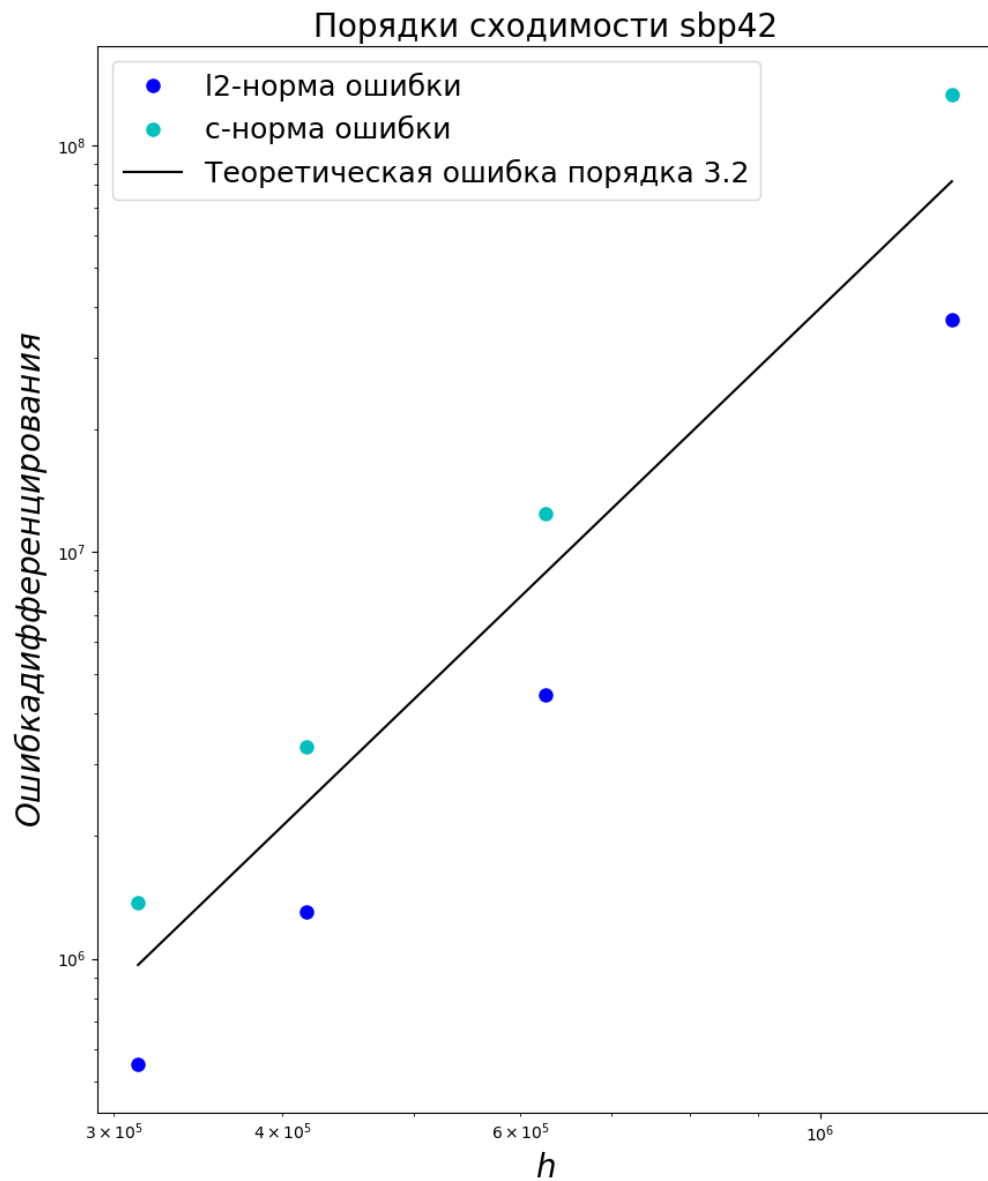


h error, left:64x128, right:32x64, sbp21, diffusion

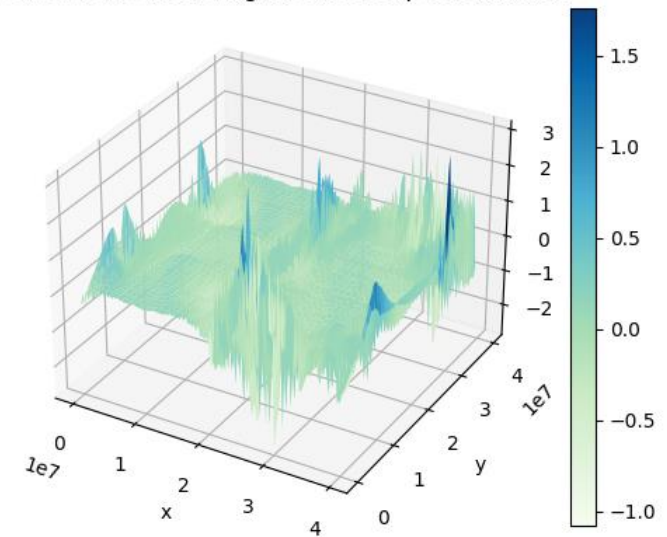


h error, left:128x256, right:64x128, sbp21, diffusion

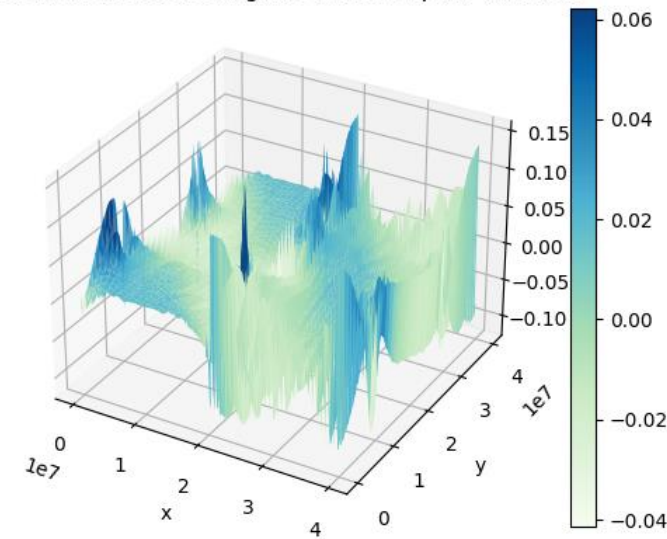




h error, left:64x128, right:32x64, sbp42, diffusion



h error, left:128x256, right:64x128, sbp42, diffusion



Тест №4: Баротропная неустойчивость

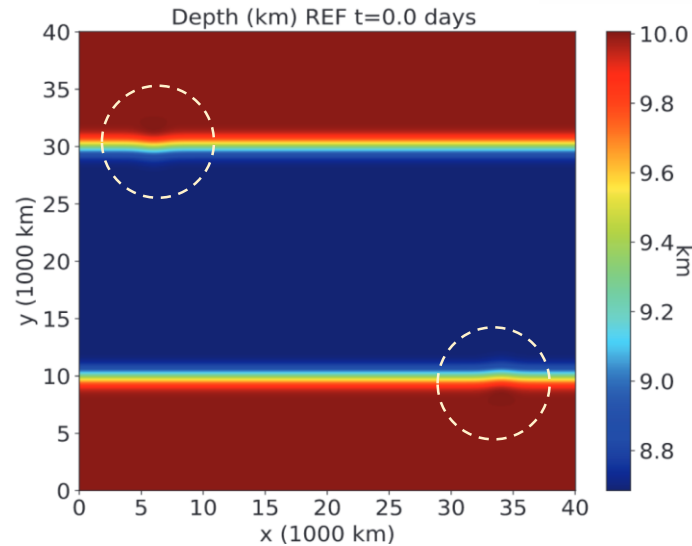
- Два струйных течения, находящиеся в неустойчивом геострофическом равновесии
- Задаются два возмущения в поле высоты уровня жидкости

$$u(x, y) = u_0 (\sin(2\pi y/L_y))^{81}$$

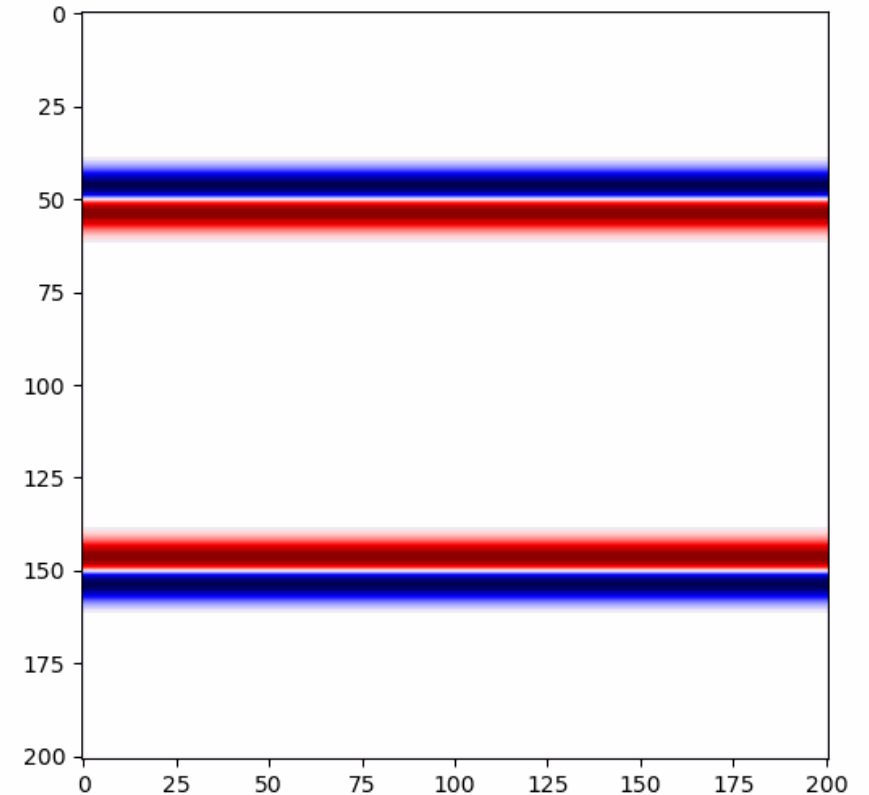
$$v(x, y) = 0.$$

$$\eta(x, y) = -\frac{f}{g} \int_0^y u(x, s) ds$$

$$h = \bar{h} + \eta$$

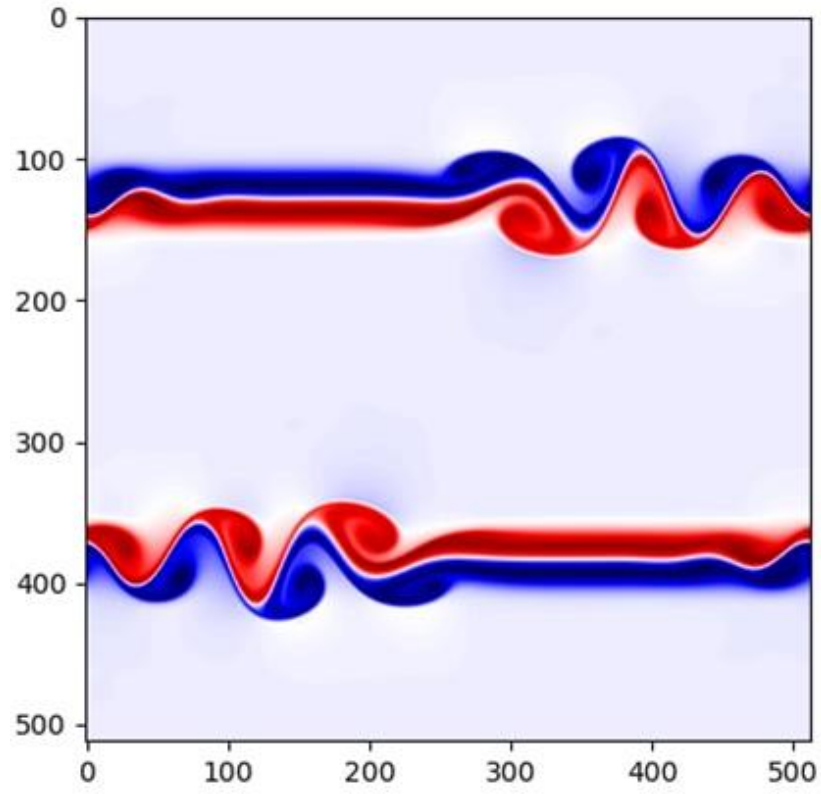


Начальные условия для h

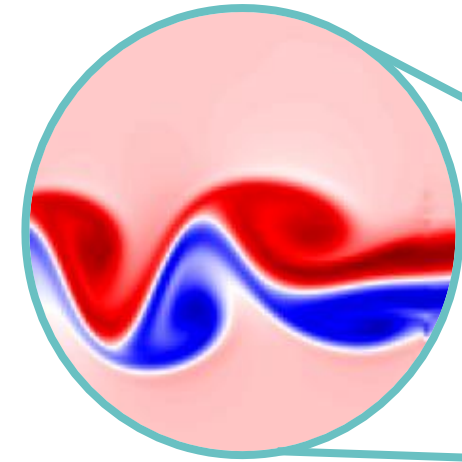
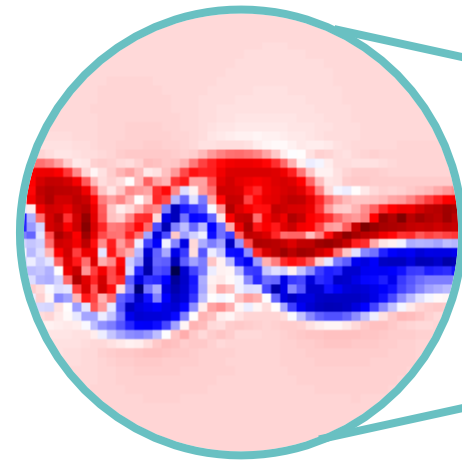


Эволюция во времени поля завихренности

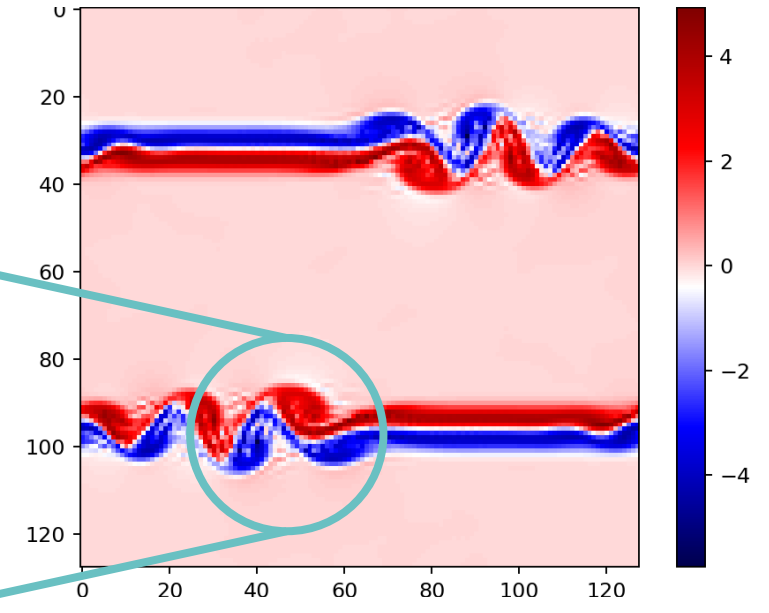
Тест №4: Баротропная неустойчивость



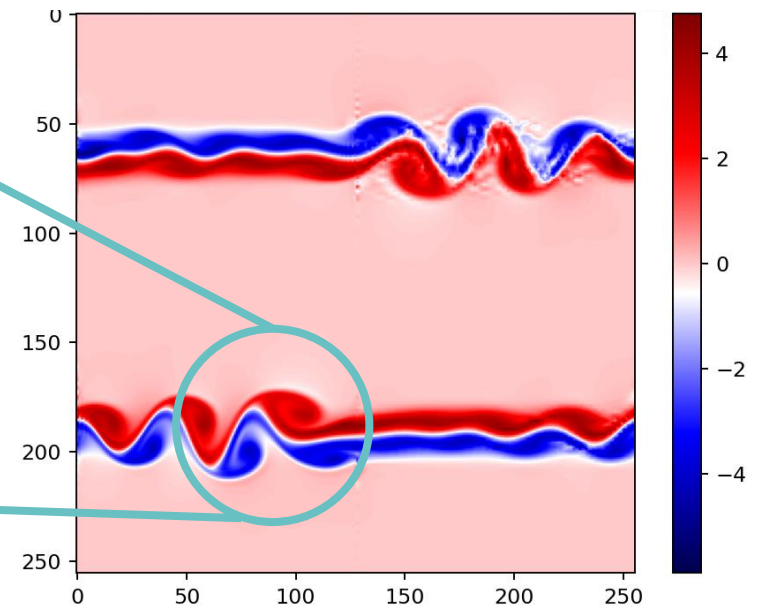
Эталонное решение



без сгущения

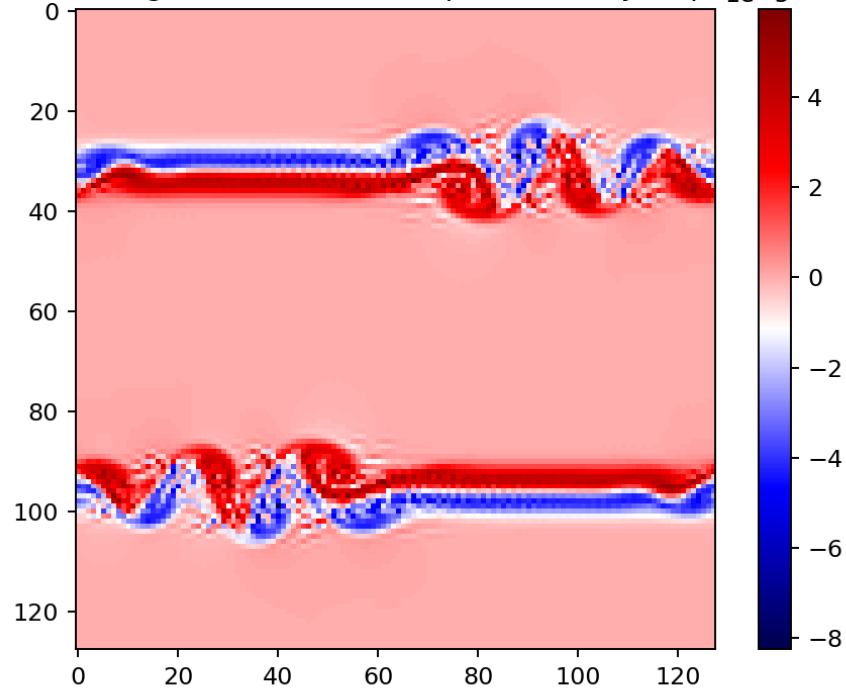


со сгущением



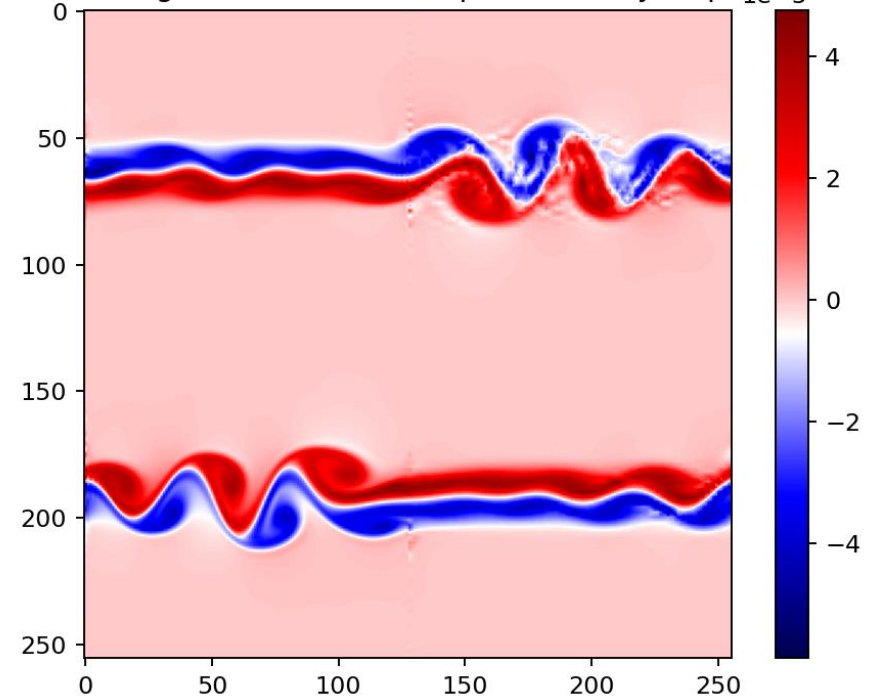
Тест №4: Баротропная неустойчивость

left: 128x256, right: 64x128, barotropic instability, sbp4_{ze}_filter off



без фильтрации

left: 128x256, right: 64x128, barotropic instability, sbp4_{ze}_filter on



с фильтрацией

ВЫВОДЫ

- При добавлении сгущения сетки появляется ошибка на интерфейсе
- Требуется использование численных фильтров и более высокий порядок схемы
- Сгущение одного из блоков сетки помогает добиться локального улучшения точности решения

ПУТИ РАЗВИТИЯ РАБОТЫ

- Применение направленных SBP разностей
- Повышение порядка SBP разностей
- Применение других методов дифференцирования, позволяющих производить сгущение сеток
- Реализация подобных методов в модели на кубической сфере

Благодарим Университет Сириус,
Тыртышникова Е.Е., Толстых М.А., Шашкина В.В.,
Гоймана Г.С., Алипову К.А.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

