Задачи для тестирования при отборе на программу «Современные методы теории информации и оптимизации».

Задача 1 (Двойственная задача, 4 балла). Постройте двойственную задачу к задаче энтропийно-линейного программирования

$$\min_{Ax=b, x\in S_n(1)} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i,$$

где $S_n(1)$ – единичный симплекс в $\mathbb{R}^n$.

Задача 2 (*min*-вариант формулы Демьянова–Данскина, 5 балла). Получите достаточные условия, при которых функция

$$f(x) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} f(x, y)$$

будет иметь градиент, и этот градиент можно искать согласно формуле

$$\nabla f(x) = \nabla_x f(x, y_*(x)),$$

где $f(x, y(x_*)) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} f(x, y)$ и $\nabla_x f(x, y_*(x))$ следует понимать как $\nabla_x f(x, y)$ при $y = y_*(x)$ (при взятии ∇_x переменная y заморожена, а потом, после взятия ∇_x, осуществляется подстановка $y = y_*(x)$).

Задача 3 (Свойства min min задач, 5 баллов). Верно ли утверждение: "Если выпуклая функция $f(x, y)$ имеет константу Липшица градиента L по совокупности своих аргументов, то

$$f(x) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} f(x, y)$$

будет иметь константу Липшица градиента не больше чем L?

Задача 4 (Байесовская оценка, 5 балла). Пусть дана простая выборка $\left\{\xi^k\right\}_{k=1}^N$ (совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин). Задана параметрическая модель $p\left(x, \left\{\xi^k\right\}_{k=1}^N\right)$ (функцией плотности вероятности, x – неизвестный вектор параметров). Пусть задана априорная плотность распределения $\pi(x)$ вектора параметров x. *Байесовской оценкой* неизвестного парметра x будем называть

$$\hat{x}_B^N = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x-z\|_2^2 p\left(z, \left\{\xi^k\right\}_{k=1}^N\right) \pi(z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} x \frac{p\left(x, \left\{\xi^k\right\}_{k=1}^N\right) \pi(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} p\left(y, \left\{\xi^k\right\}_{k=1}^N\right) \pi(y) dy} dx,$$

а *оценкой макисмума апостпериорного распределения* (MAP)

$$\hat{x}_{MAP}^N = \arg\max_{x\in\mathbb{R}^n} p\left(x, \left\{\xi^k\right\}_{k=1}^N\right) \pi(x) = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left[-\log p\left(x, \left\{\xi^k\right\}_{k=1}^N\right) - \log \pi(x)\right].$$

Найдите Байесовскую оценку и MAP-оценку для следующей модели генерирования данных:

$$\xi^k = \langle a_k, x\rangle + \eta^k,\ k = 1, ..., N,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\eta^k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, матрица $A = [a_1, ..., a_N]^T$ известная; параметр x априорно выбирается случайно согласно плотности распределения $\pi(x) \sim \mathcal{N}\left(x^0, \sigma_\pi^2\right)$.

Как изменится MAP-оценка, если

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda |x_i|) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \exp\left(-\lambda \|x\|_1\right)?$$

Задача 5 (SVM, 6 баллов). Предложите численный способ решения следующей задачи обучения машины опорных векторов

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\sum_{k=1}^{N} \max\left\{0, 1 - y^k \langle x, a_k \rangle\right\} + \frac{1}{2\sigma_\pi^2} \|x\|_2^2\right].$$

Задача 6 (1 балл). Найти НОД($\underbrace{11\ldots1}_{n}$, $\underbrace{11\ldots1}_{m}$).

Задача 7 (1 балл). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Найти замкнутое выражение для суммы

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k}{k}.$$

Задача 8 (1 балл). Дано реккурентное соотношение ($n \geqslant 2$)

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n \geqslant 2$$

со следующими начальными условиями

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = 1.$$

Найти a_{100}.

Задача 9 (3 балла). Пусть $m \geqslant 2$ – целое число. Выразите в замкнутом виде, как функцию z и m, производящую функцию последовательности $\langle n \mod m \rangle$. Используя эту производящую функцию, выразите '$n \mod m$' в терминах комплексного числа $\omega = e^{2\pi i/m}$. (Например, для $m = 2$ будем иметь $\omega = -1$ и $n \mod 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n$.)

Задача 10 (1 балл). Рассмотрим двоичный симметричный канал (ДСК) с переходной вероятностью p_1. Выход этого канала подается на вход еще одного ДСК с переходной вероятностью p_2. Найти пропускную способность результирующего канала.

Задача 11 (2 балла). Под источником понимается случайная величина X с множеством значений $\mathcal{X}$, $|\mathcal{X}| = n$. Кодом для источника называется отображение $\mathcal{X} \to \{0, 1\}^*$. Код называется оптимальным, если средняя длина слов минимальна. Показать, что сумма длин всех слов любого оптимального кода для n-элементного источника не превосходит $(n-1)(n+2)/2$.

Задача 11 (1 балл). Рассмотрим линейное пространство $\{0,1\}^n$ с операциями поэлементной суммы по модулю 2 и умножения. Линейным $[n,k]$-кодом называется подпространство $\{0,1\}^n$ размерности k. Сколько существует линейных $[n,k]$-кодов?

Задача 12 (1 балл). Пусть x_i независимые и равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ случайные величины.

- Найти плотность вероятности суммы $x_1 + x_2$.
- Найти математическое ожидание следующей случайной величины:

$$y = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{2022}\}.$$

Задача 13 (4 балла). Рассмотрим канал W с входом $X \in [0,1]$ и двоичным выходом $Y \in \{0,1\}$, такой что

$$\Pr(Y = 0 | X = x) = 1 - x$$

и

$$\Pr(Y = 1 | X = x) = x.$$

Пусть $P < 1/2$ и задано дополнительное ограничение: $\mathbb{E}[|X - 1/2|] \leqslant P$.

1. Какова пропускная способность данного канала?
2. Предложите простую схему кодирования, достигающую пропускной способности.